

توان در مدارهای سینوسی



تحلیل سیستم‌های انرژی الکتریکی ۱

ایمان صادق‌خانی

دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد

شکل موج ولتاژ و جریان در شبکه‌های برق به صورت سینوسی است:

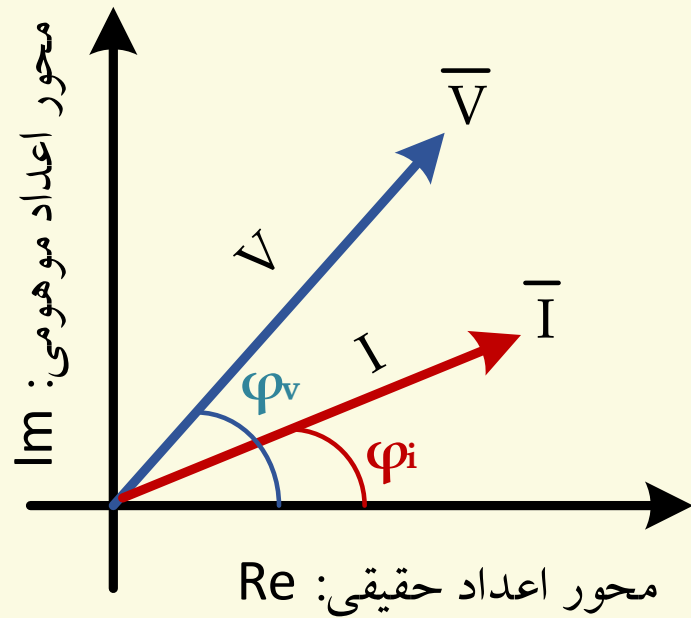
$$\begin{cases} v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \end{cases}$$

به دلیل سختی تحلیل مدارهای سینوسی در حوزه زمان، از مفهوم فازورها استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} \bar{V} = V \angle \phi_v \\ \bar{I} = I \angle \phi_i \end{cases}$$

که در آن V و I مقادیر مؤثر شکل موج‌های ولتاژ و جریان هستند.

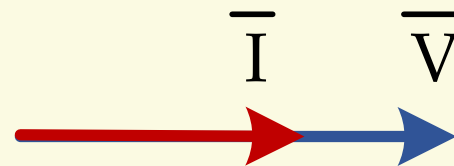
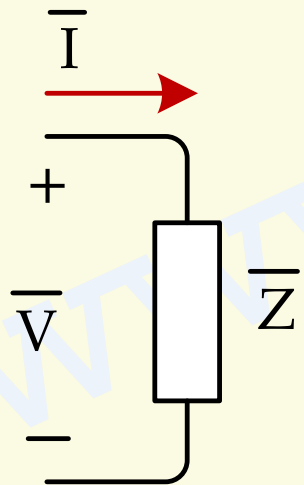
$$V_{\text{rms}} = V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$



هر فازور را می‌توان در صفحه اعداد مختلط با یک بردار نمایش داد:

- اگر $\phi_v = \phi_i$ باشد، سیستم همفاز (In Phase) است
- اگر $\phi_v > \phi_i$ باشد، سیستم پس‌فاز (Lag) است
- اگر $\phi_v < \phi_i$ باشد، سیستم پیش‌فاز (Lead) است
- به عبارت دیگر اگر جریان عقب‌تر از ولتاژ باشد، پس‌فاز و اگر جریان جلوتر از ولتاژ باشد، پیش‌فاز خواهد بود.

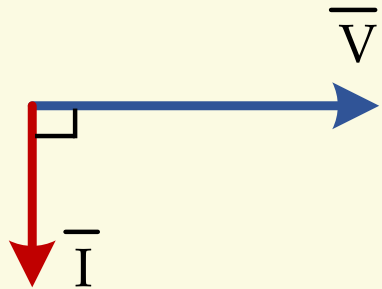
نکته: در شبکه‌های برق، یکی از ولتاژهای مدار را بعنوان مرجع در نظر گرفته ($\phi_v = 0$) و زاویه بقیه متغیرها را نسبت به آن می‌سنجیم.



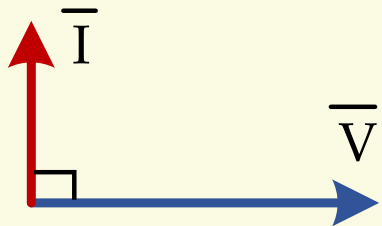
- اگر بار مقاومتی باشد:

سیستم همفاز خواهد بود:

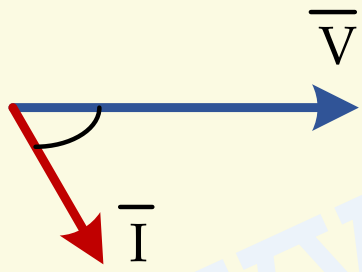
- اگر بار سلفی خالص باشد، سیستم پسفاز خواهد بود:



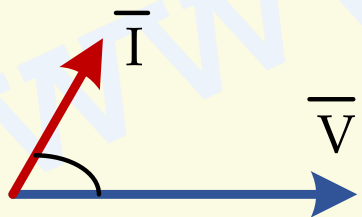
- اگر بار خازنی خالص باشد، سیستم پیشفاز خواهد بود:



- اگر بار ماهیت سلفی داشته باشد، سیستم پسفاز خواهد بود:



- اگر بار ماهیت خازنی داشته باشد، سیستم پیشفاز خواهد بود:



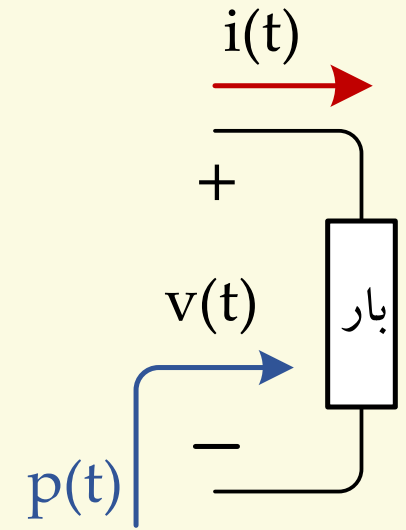
توان در مدارهای سینوسی تکفاز

توان لحظه‌ای (Instantaneous Power) بصورت ضرب سیگنال ولتاژ در سیگنال جریان تعریف می‌شود. با فرض نمایش سیگنال‌های ولتاژ و جریان به فرم زیر و تعریف اختلاف فاز ولتاژ و جریان بصورت $\phi = \phi_v - \phi_i$ ، خواهیم داشت:

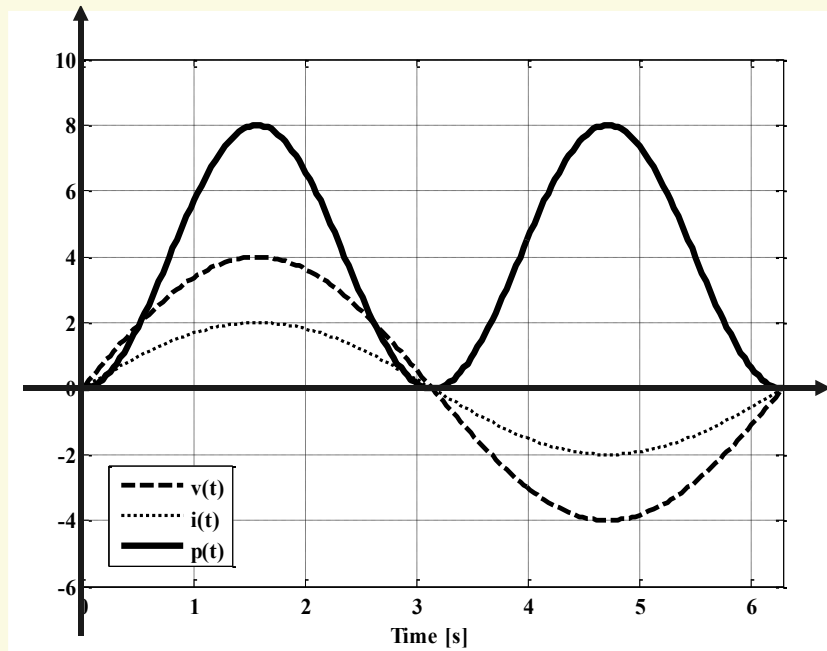
$$\begin{cases} v(t) = V_m \cos(\omega t) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t - \phi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t) \times i(t) = V_m I_m \cos(\omega t) \times \cos(\omega t - \phi) \\ &= V_m I_m \cos(\omega t) \times [\cos\omega t \cdot \cos\phi + \sin\omega t \cdot \sin\phi] \end{aligned}$$

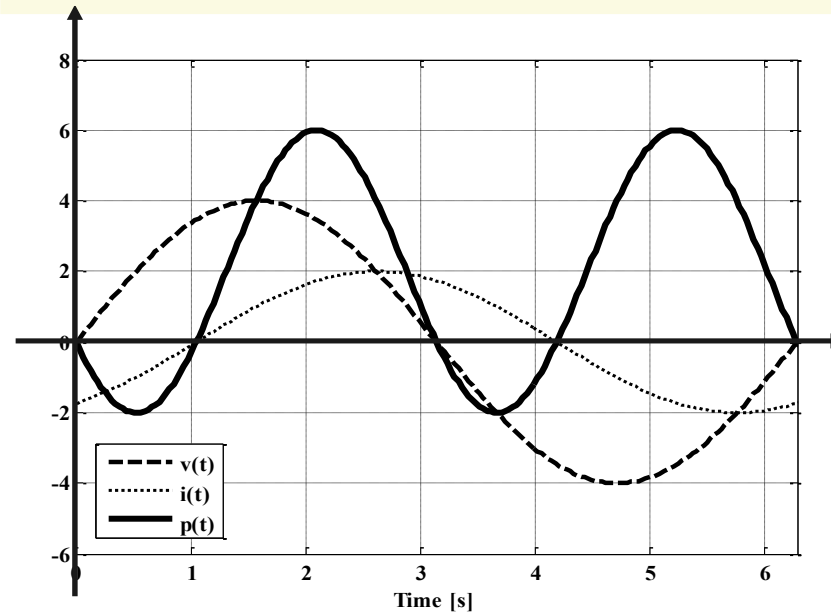
$$= \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\phi) [1 + \cos(2\omega t)]}_{\text{مؤلفه حقیقی توان لحظه‌ای}} + \underbrace{\frac{1}{2} V_m I_m \sin(\phi) \sin(2\omega t)}_{\text{مؤلفه راکتیو توان لحظه‌ای}}$$



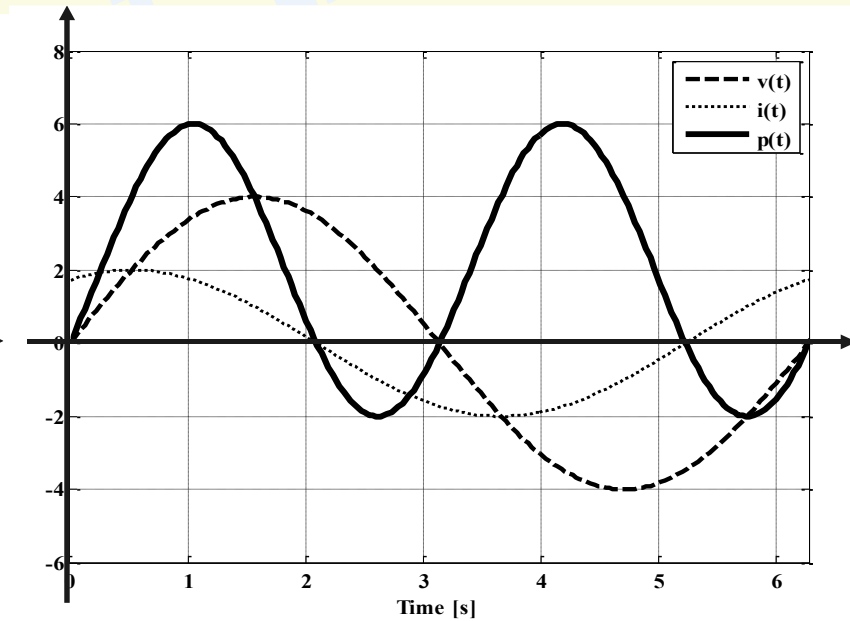
توان در مدارهای سینوسی تکفاز



$$\phi = 0$$

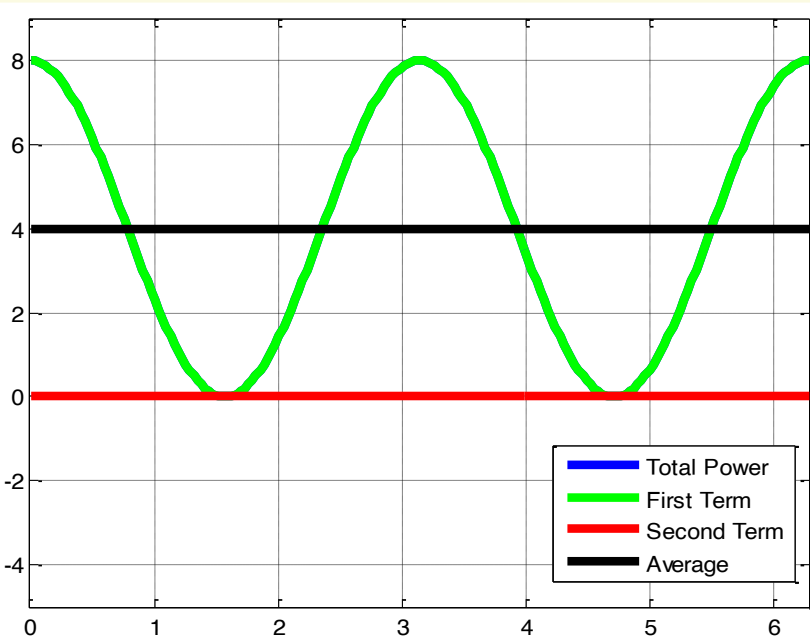


$$\phi = +60^\circ$$

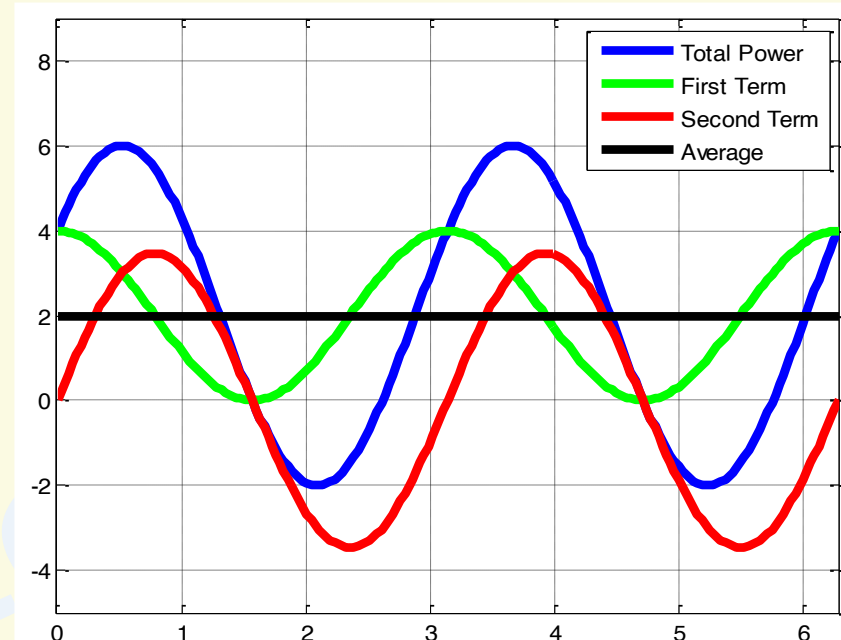


$$\phi = -60^\circ$$

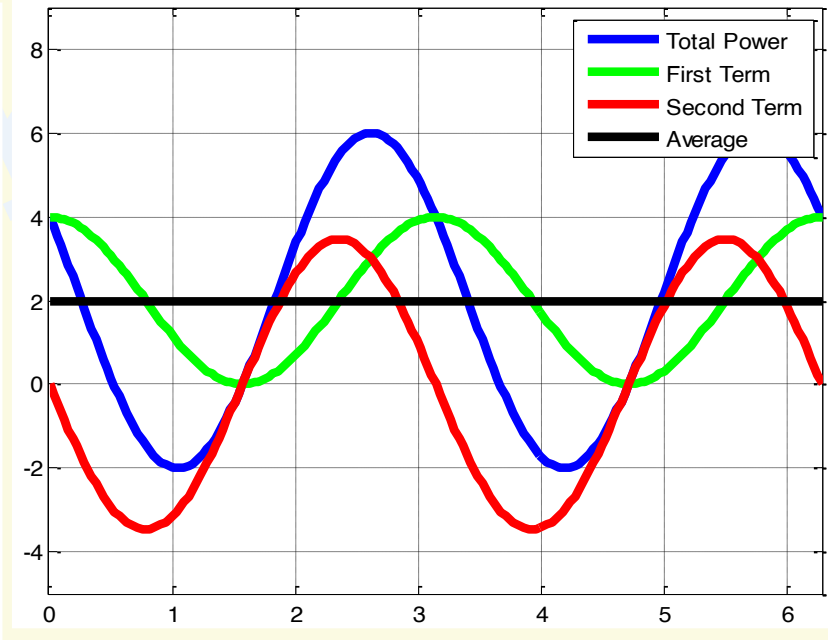
توان در مدارهای سینوسی تکفاز



$$\phi = 0$$



$$\phi = +60^\circ$$



$$\phi = -60^\circ$$

توان در مدارهای سینوسی تکفاز

در صورتی کار انجام خواهد شد که مقدار متوسط توان لحظه‌ای دریافتی بار مخالف صفر باشد. مقدار متوسط توان لحظه‌ای را توان حقیقی (Real Power) یا توان اکتیو (Active Power) می‌نامند:

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \phi = VI \cos \phi$$

دامنه مؤلفه راکتیو توان لحظه‌ای را به عنوان توان راکتیو (Reactive power) یا توان موهومی (Imaginary Power) تعریف می‌کنند:

$$Q \triangleq \frac{1}{2} V_m I_m \sin \phi = VI \sin \phi$$

بنابراین بهترین نوع بار، بار مقاومتی است ($\phi = 0$)، زیرا توان حقیقی حداکثر مقدار ممکن و توان راکتیو کمترین مقدار ممکن را دارد.

توان در مدارهای سینوسی تکفاز

حداکثر توان حقیقی را توان ظاهری (Apparent Power) می نامند:

$$S = P_{\max} = VI$$

پس اگر بار سلفی و یا خازنی باشد، از کل ظرفیت سیستم برای انجام کار استفاده نخواهد شد و قسمتی از توان (توان راکتیو) در یک نیم سیکل از منبع به سمت بار و در نیم سیکل بعد از بار به سمت منبع جاری می شود یعنی متوسط آن صفر می باشد. توان مفید (حقیقی) در هر حالت ضریبی است از توان حقیقی بیشینه (توان ظاهری):

$$P = P_{\max} \times \text{P.F.} = S \times \text{P.F.}$$

این ضریب را ضریب توان (Power Factor: P.F.) می نامند. این ضریب برابر است با:

$$\text{P.F.} = \frac{P}{S} = \cos\phi$$

به دلیل زوج بودن تابع کسینوس، ضریب توان باری با $\phi = +30^\circ$ با ضریب توان باری با $\phi = -30^\circ$ یکسان است. برای رفع این مشکل، نمایش ضریب توان معمولاً دارای دو قسمت است: (۱) عدد ضریب توان و (۲) عبارت پسفاز یا پیشفاز

$$\text{P.F.} = 0.86 \text{ Lag}$$

واحد توان حقیقی، توان راکتیو و توان ظاهری وات $[W]$ است اما برای اینکه تمیزی بین آنها قائل شوند، توان راکتیو را با واحد وار (ولت-آمپر راکتیو) $[VA_r]$ و توان ظاهری را با واحد ولت-آمپر $[VA]$ بیان می کنند.

چند نکته:

- توان حقیقی در واقع توان مفید است که منجر به انجام کار می شود
- توان راکتیو مؤلفه غیرمفید است زیرا تنها ظرفیت مفید کابل ها و دیگر تجهیزات شبکه برق را اشغال کرده و کاری انجام نمی دهد (مقدار متوسط آن در یک سیکل صفر است)
- بهترین بار از دیدگاه شبکه بار مقاومتی است زیرا توان حقیقی حداکثر و توان راکتیو صفر است اما در عمل معمولاً چنین باری وجود ندارد؛ به همین دلیل است که به میزان توان حقیقی که در این حالت حداکثر است، "توان ظاهری" گفته می شود
- از آنجایی که اکثر بارهای شبکه برق دارای ماهیت سلفی هستند، همواره در شبکه توان راکتیو جاری است.

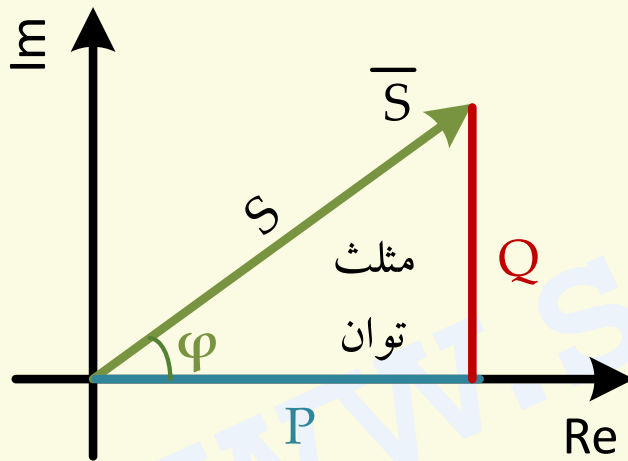
توان در مدارهای سینوسی تکفاز

- توان مختلط

توان مختلط (Complex Power) به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{S} \triangleq P + jQ$$

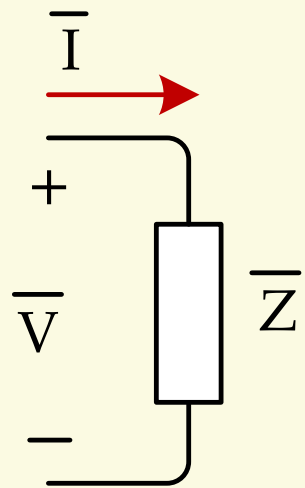
مزیت این متغیر شامل بودن هر دو متغیر توان حقیقی و توان راکتیو است.



$$|\bar{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(VI \cos \phi)^2 + (VI \sin \phi)^2} = VI = S$$
$$\angle \bar{S} = \tan^{-1} \frac{Q}{P} = \tan^{-1} \frac{VI \sin \phi}{VI \cos \phi} = \phi$$

$$\bar{S} = S \angle \phi = \bar{V} \cdot \bar{I}^*$$

$$\bar{S} = S(\cos \phi + j \sin \phi) = P + jQ \Rightarrow \begin{aligned} P &= S \cos \phi \\ Q &= S \sin \phi \end{aligned}$$



یادآوری:

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{A}^* = |\bar{A}|^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \bar{S} = \bar{V} \cdot \bar{I}^* = \bar{Z} \cdot |\bar{I}|^2 = \frac{|\bar{V}|^2}{\bar{Z}^*}$$

$$\bar{Z} = R \text{ بار مقاومتی: } \bar{S}_R = R \cdot |\bar{I}|^2 = \frac{|\bar{V}|^2}{R} = P_R + jQ_R \Rightarrow \begin{cases} P_R = R|\bar{I}|^2 = \frac{|\bar{V}|^2}{R} \\ Q_R = 0 \end{cases}$$

$$\bar{Z} = jL\omega \text{ بار سلفی خالص: } \bar{S}_L = jL\omega \cdot |\bar{I}|^2 = \frac{|\bar{V}|^2}{-jL\omega} = j \frac{|\bar{V}|^2}{L\omega} = P_L + jQ_L \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = L\omega |\bar{I}|^2 = \frac{|\bar{V}|^2}{L\omega} \end{cases}$$

$$\bar{Z} = \frac{-j}{C\omega} \text{ بار خازنی خالص } \bar{S}_C = \frac{-j}{C\omega} \cdot |\bar{I}|^2 = \frac{|\bar{V}|^2}{\frac{j}{C\omega}} = -jC\omega|\bar{V}|^2 = P_C + jQ_C \Rightarrow \begin{cases} P_C = 0 \\ Q_C = \frac{-|\bar{I}|^2}{C\omega} = -C\omega|\bar{V}|^2 \end{cases}$$

بنابراین توان راکتیو سلف مثبت و توان راکتیو خازن منفی است.

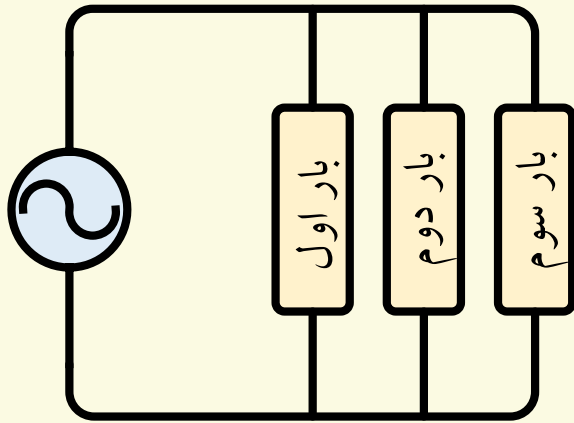
سلف و خازن در یک نیم سیکل توان راکتیو مصرف و در نیم سیکل دیگر توان راکتیو تولید می کنند.

قرارداد:

- سلف مصرف کننده توان راکتیو است.
- خازن تولید کننده توان راکتیو است.

توان در مدارهای سینوسی تکفاز

– مثال: سه بار زیر از طریق یک شبکه تکفاز تغذیه می‌شوند. توان مصرفی و ضریب توان معادل مجموعه را بدست آورید.



بار اول: بار روشنایی 100 W با ضریب توان واحد

بار دوم: بار القایی 100 W با ضریب توان 0.8 پسفاز

بار سوم: بار 120 VA با ضریب توان 0.6 پیشفاز

حل مثال: طبق قانون بقای توان داریم: $\bar{S}_G = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$

$$P_1 = 100\text{ W}, \text{PF}_1 = 1 \rightarrow Q_1 = 0 \Rightarrow \bar{S}_1 = 100\text{ W} + j0\text{ VAr}$$

$$P_2 = 100\text{ W}, \text{PF}_2 = 0.8\text{ Lag} \Rightarrow S_2 = \frac{100}{0.8} = 125\text{ VA}$$

$$\phi_2 = \cos^{-1} 0.8 = \pm 36.87^\circ \rightarrow \sin \phi_2 = \pm 0.6 \Rightarrow Q_2 = S_2 \cdot \sin \phi_2 = 125 \times (\pm 0.6) = \pm 75\text{ VAr}$$

$$\Rightarrow \bar{S}_2 = 100\text{ W} + j75\text{ VAr}$$

ضرب توان پسفاز $\leftarrow$ بار سلفی $\leftarrow$ توان راکتیو مثبت قابل قبول است

توان در مدارهای سینوسی تکفاز

$$S_3 = 120 \text{ VA}, PF_3 = 0.6 \text{ Lead} \Rightarrow P_3 = S_3 \cdot \cos\phi_3 = 120 \times 0.6 = 72 \text{ W}$$

$$\phi_3 = \cos^{-1} 0.6 = \pm 53.1^\circ \rightarrow \sin\phi_3 = \pm 0.8 \Rightarrow Q_3 = S_3 \cdot \sin\phi_3 = 120 \times (\pm 0.8) = \pm 96 \text{ VAr}$$

$$\Rightarrow \bar{S}_3 = 72^{\text{W}} - j96^{\text{VAr}}$$

ضرب توان پیشفاز $\leftarrow$ بار خازنی $\leftarrow$ توان راکتیو منفی قابل قبول است

$$\bar{S}_G = (100^{\text{W}} + j0^{\text{VAr}}) + (100^{\text{W}} + j75^{\text{VAr}}) + (72^{\text{W}} - j96^{\text{VAr}}) = 272^{\text{W}} - j21^{\text{VAr}}$$

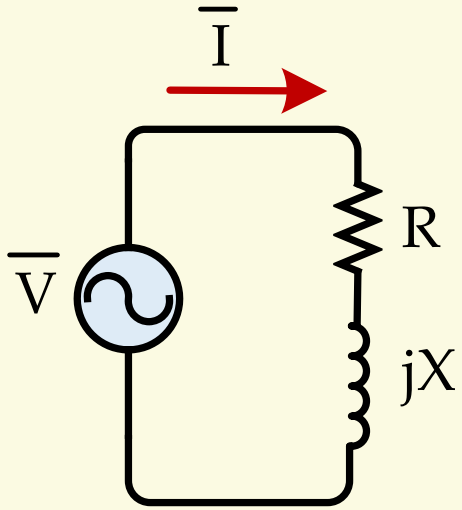
$$\phi_G = \tan^{-1} \frac{-21}{272} = -4.41^\circ \Rightarrow PF_G = \cos\phi_G = 0.997 \text{ Lead}$$

توان راکتیو بار خازنی $\leftarrow$ پیشفاز $\leftarrow$

$$\bar{S}_G = \bar{V}_G \bar{I}_G^* \rightarrow \bar{I}_G = \left(\frac{\bar{S}_G}{\bar{V}_G} \right)^* = \left(\frac{272 - j21}{230 \angle 0} \right)^* = 1.18^{\text{A}} \angle +4.41^\circ$$

- مثال: در مدارهای زیر توان تولیدی منبع تغذیه را بر حسب ولتاژ و امپدانس ها تعیین کنید.

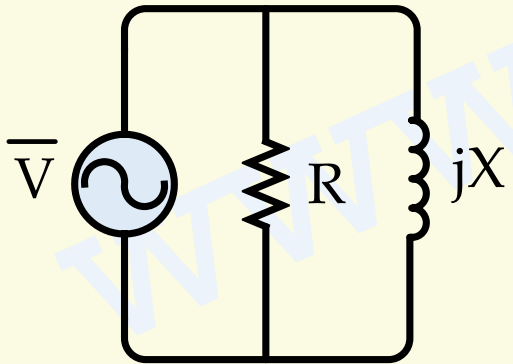
حل مثال:



$$\bar{V} = V \angle 0$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}}{R + jX} \Rightarrow |\bar{I}| = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$\bar{S}_G = \bar{S}_{\text{Load}} = \bar{Z} |\bar{I}|^2 = (R + jX) \left(\frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}} \right)^2 = \underbrace{\frac{RV^2}{R^2 + X^2}}_{P_G} + j \underbrace{\frac{XV^2}{R^2 + X^2}}_{Q_G} = P_G + jQ_G$$



$$P_G = P_{\text{Load}} = \frac{V^2}{R}$$

$$Q_G = Q_{\text{Load}} = \frac{V^2}{X}$$

توان در مدارهای سینوسی تکفاز

- تمرین: یک بار سلفی شامل یک مقاومت و یک سلف از منبع تغذیه ۲۴۰۰ ولتی تکفاز توان ۲۸۸ kW را در ضریب توان ۰/۸ پسفاز جذب می کند. مقدار R و X را برای دو حالت (الف) اتصال سری و (ب) اتصال موازی امپدانس ها با منبع محاسبه نمایید.

$$\begin{matrix} V_m & \omega \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

- مثال: بار تکفازی با منبع ولتاژ سینوسی $v(t) = 200\cos(377t)$ را در نظر بگیرید. اگر توان لحظه ای بار برابر $p(t) = 800 + 1000\cos(754t - 36.87^\circ)$ باشد، مطلوبست: (الف) توان مختلط تحویلی به بار، (ب) جریان لحظه ای و (ج) امپدانس بار.

- حل مثال: (الف) بر اساس اثبات ارائه شده برای توان لحظه ای داریم:

$$p(t) = 800 + 1000(\cos 754t \cdot \cos 36.87 + \sin 754t \cdot \sin 36.87)$$

$$p(t) = 800 + 800\cos 754t + 600 \sin 754t = 800(1 + \cos 754t) + 600\sin 754t$$

با مقایسه رابطه قبل با رابطه $p(t) = P[1 + \cos(2\omega t)] + Q\sin(2\omega t)$ داریم:

$$\Rightarrow P = 800 \text{ W}, Q = +600 \text{ VAr} \quad \text{پس فاز (بار سلفی)} \rightarrow \text{توان راکتیو مثبت} \Rightarrow \bar{S} = 800^{\text{W}} + j600^{\text{VAr}}$$

$$\text{(ب): } \bar{S} = \bar{V}\bar{I}^* \Rightarrow \bar{I} = \left(\frac{\bar{S}}{\bar{V}} \right)^* = \left(\frac{800 + j600}{\frac{200}{\sqrt{2}} \angle 0} \right)^* = 7.07^{\text{A}} \angle -36.87^\circ$$

↗ مقدار مؤثر

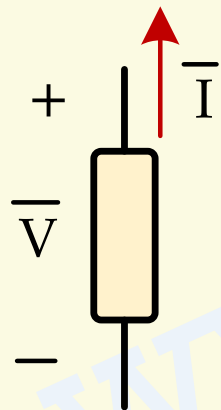
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i) = 7.07 \times \sqrt{2} \cos(377t - 36.87^\circ)$$

$$i(t) = 10 \cos(377t - 36.87^\circ)$$

چون در صورت سؤال ولتاژ با کسینوس بیان شده است، جریان لحظه‌ای را نیز باید با تابع کسینوس بیان کرد.

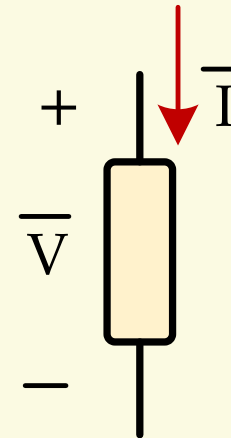
$$(ج): \bar{S} = \frac{V^2}{\bar{Z}^*} \Rightarrow \bar{Z} = \left(\frac{V^2}{\bar{S}} \right)^* = \left(\frac{(200/\sqrt{2})^2}{800 + j600} \right)^* = 20 \Omega \angle 36.87^\circ = 16 + j12 \Omega$$

- تعیین تولید و مصرف توان عناصر
برای هر عنصر دو حالت وجود دارد:



تولید توان حقیقی $\rightarrow$ فرض درست $P > 0$
مصرف توان حقیقی $\rightarrow$ فرض نادرست $P < 0$
تولید توان راکتیو $\rightarrow$ فرض درست $Q > 0$
مصرف توان راکتیو $\rightarrow$ فرض نادرست $Q < 0$

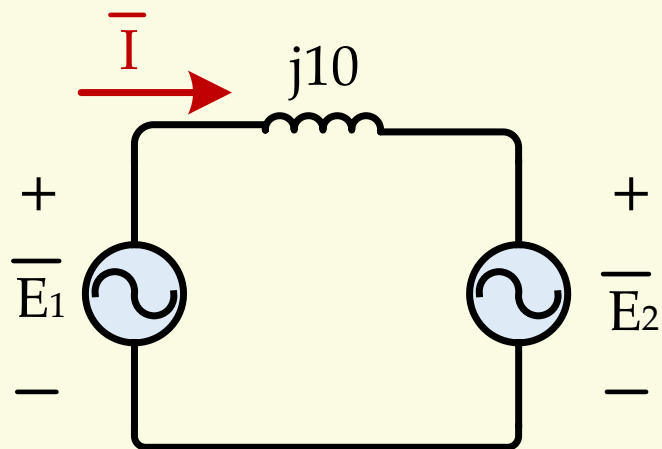
خروج جریان از سر مثبت $\leftarrow$ قرارداد تولید



مصرف توان حقیقی $\rightarrow$ فرض درست $P > 0$
تولید توان حقیقی $\rightarrow$ فرض نادرست $P < 0$
مصرف توان راکتیو $\rightarrow$ فرض درست $Q > 0$
تولید توان راکتیو $\rightarrow$ فرض نادرست $Q < 0$

ورود جریان به سر مثبت $\leftarrow$ قرارداد مصرف

توان در مدارهای سینوسی تکفاز



– مثال: در شکل زیر منابع ولتاژ مدل دو ماشین ایده آل هستند که با خطی به امپدانس $j10 \Omega$ به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر $\bar{E}_1 = 100V \angle 36.87^\circ$ و $\bar{E}_2 = 120V \angle 0^\circ$ باشند، قانون بقای توان را بررسی نمایید.

– حل مثال: ابتدا یک جهت اختیاری برای جریان انتخاب می‌کنیم. با این انتخاب فرض کرده‌ایم ماشین اول تولید کننده و ماشین دوم مصرف کننده (موتور) است. حال به بررسی صحت این فرض می‌پردازیم.

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{j10} = \frac{100 \angle 36.87^\circ - 120}{j10} = \frac{80 + j60 - 120}{j10} = 6 + j4 \text{ A}$$

توان در مدارهای سینوسی تکفاز

$$\bar{S}_1 = \bar{E}_1 \cdot \bar{I}^* = 100 \angle 36.87^\circ \times (6 + j4)^* = 720^W + j40^{VAr}$$

مثبت ← فرض تولید کننده بودن درست ← ۷۲۰ وات تولید توان حقیقی مثبت ← فرض تولید کننده بودن درست ← ۴۰ وار تولید توان راکتیو

$$\bar{S}_2 = \bar{E}_2 \cdot \bar{I}^* = 120 \angle 0^\circ \times (6 + j4)^* = 720^W - j480^{VAr}$$

مثبت ← فرض مصرف کننده بودن درست ← ۷۲۰ وات مصرف توان حقیقی منفی ← فرض مصرف کننده بودن نادرست ← ۴۸۰ وار تولید توان راکتیو

$$\bar{S}_L = \bar{Z} |\bar{I}|^2 = j10 \times (\sqrt{6^2 + 4^2})^2 = j520 \text{ VAr}$$

۵۲۰ وار مصرف توان راکتیو → طبق قرارداد: سلف مصرف کننده توان راکتیو

قانون بقای توان:

تولید توان راکتیو = مصرف توان راکتیو

$$520 = 40 + 480$$

✓✓

تولید توان حقیقی = مصرف توان حقیقی

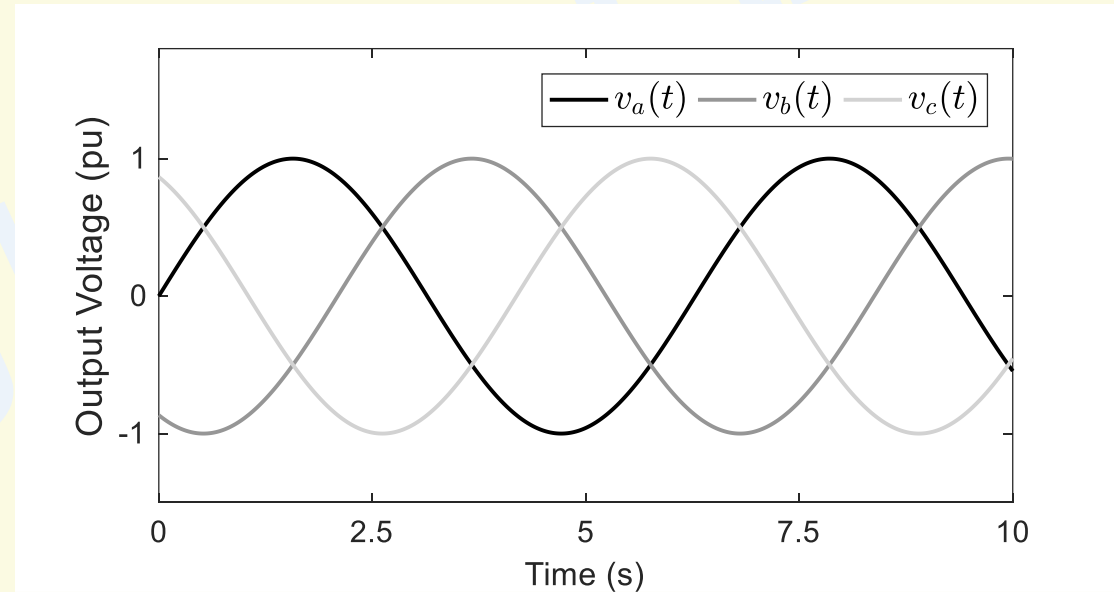
$$720 = 720$$

تعداد کابل مورد نیاز برای هر مدار تکفاز $\leftarrow 2$
 تعداد کابل مورد نیاز برای هر مدار سه فاز $\leftarrow 3$

اما توان انتقالی در مدار سه فاز ۳ برابر توان انتقالی در مدار تکفاز

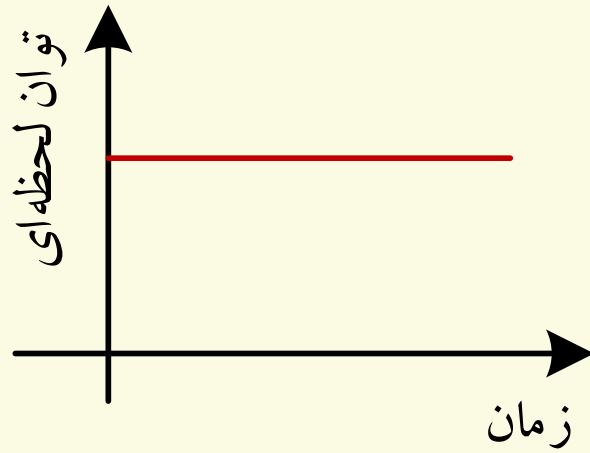
شکل موج ولتاژ
در مدار سه فاز

$$\begin{cases} v_a(t) = V_{ma} \cos(\omega t + \phi_{va}) \\ v_b(t) = V_{mb} \cos(\omega t + \phi_{vb}) \\ v_c(t) = V_{mc} \cos(\omega t + \phi_{vc}) \end{cases}$$

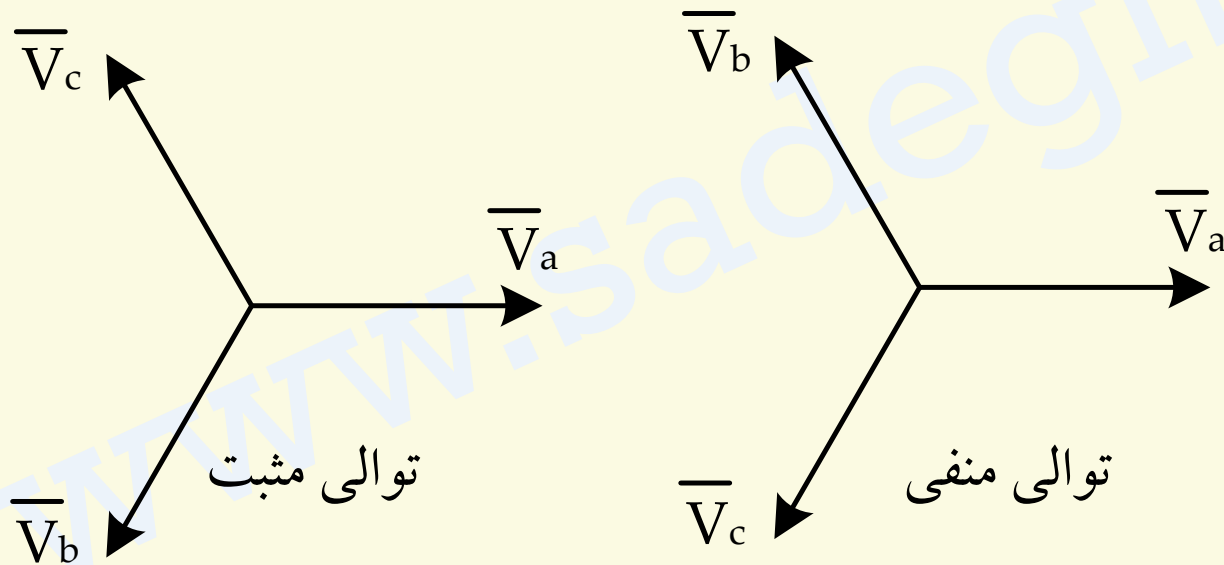


سیستم متعادل: اگر دامنه ولتاژ سه فاز برابر و اختلاف زاویه آنها دو به دو برابر 120° درجه باشد، سیستم سه فاز را متعادل گویند.

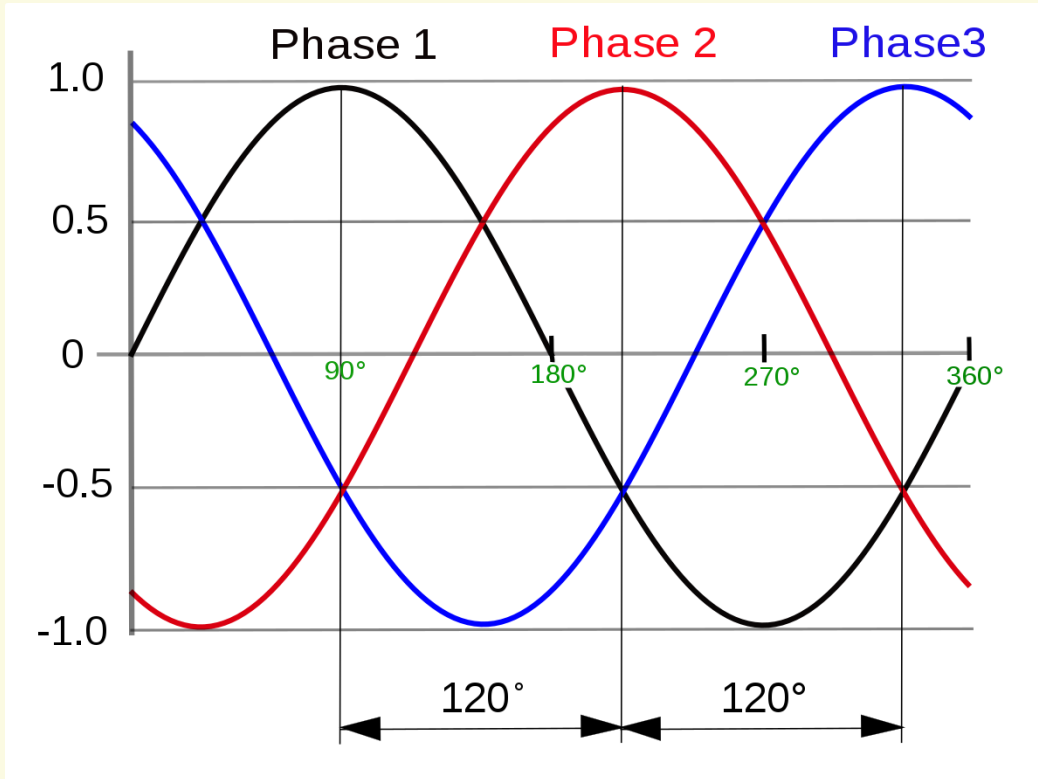
حالت ایده آل شبکه برق متعادل بودن سیستم در همه بخش های آن است (فرض این درس نیز متعادل بودن شبکه است).



$$p(t) = v_a(t)i_a(t) + v_b(t)i_b(t) + v_c(t)i_c(t)$$



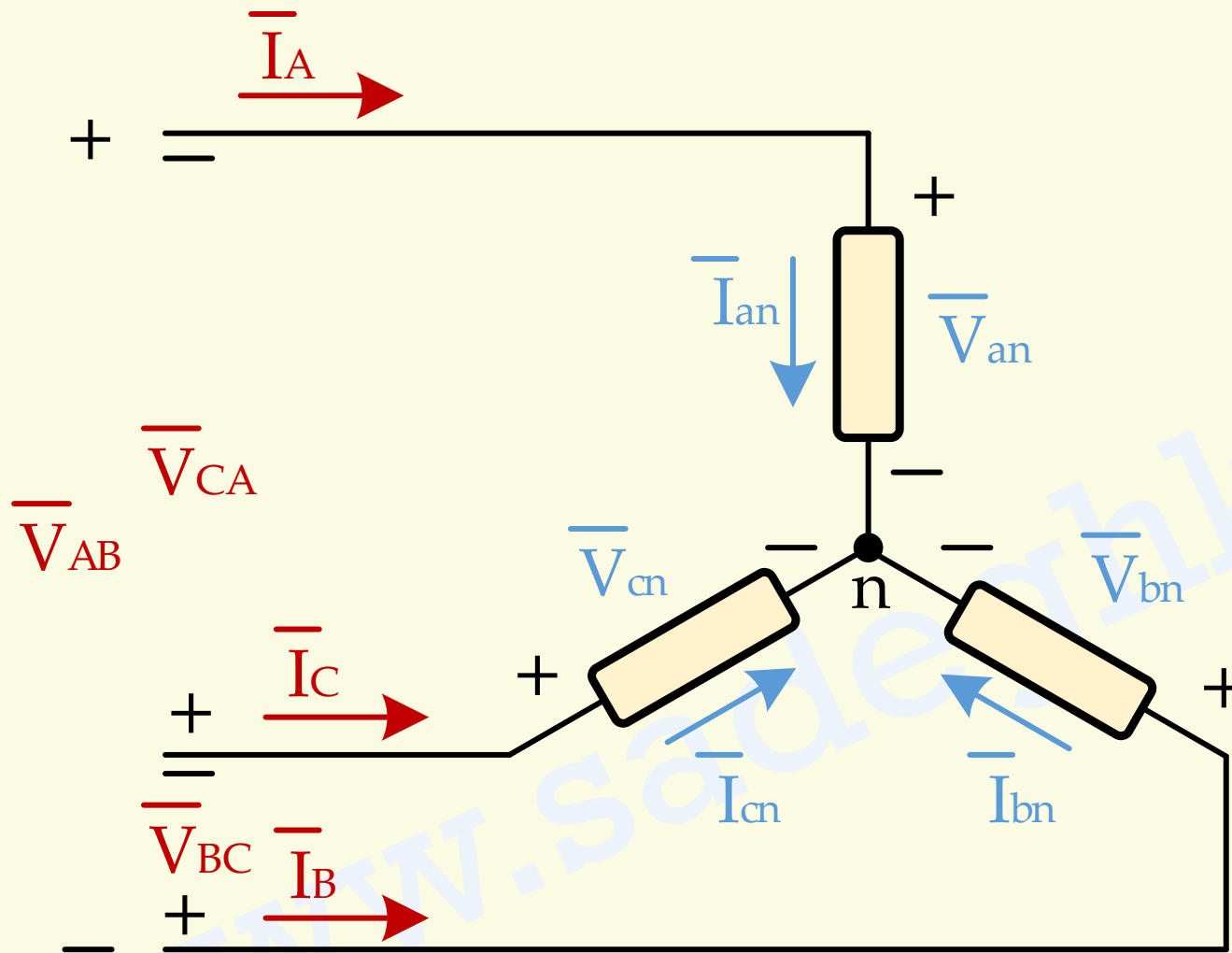
استاندارد انتخابی شبکه برق، توالی مثبت است



به منظور کاهش تعداد کابل ها و با توجه به اختلاف زاویه ۱۲۰ درجه فازها، سه فاز شبکه را بصورت ستاره یا مثلث بهم متصل می کنند. اختلاف زاویه باعث می شود که در هر لحظه از زمان، برخی فازها مسیر برگشت جریان فازهای دیگر باشند؛ بنابراین به سیم نول (مسیر برگشت) نیازی نیست.

اتصال ستاره (Star Connection): $\mathbf{Y \Delta}$

در اتصال ستاره جریان خط با جریان فاز برابر است.



$$\begin{cases} \bar{V}_{AB} = \bar{V}_{an} - \bar{V}_{bn} \\ \bar{V}_{BC} = \bar{V}_{bn} - \bar{V}_{cn} \\ \bar{V}_{CA} = \bar{V}_{cn} - \bar{V}_{an} \end{cases}$$

کمیت‌های خط (خط-خط)

(L/LL)

کمیت‌های فاز

(ph)

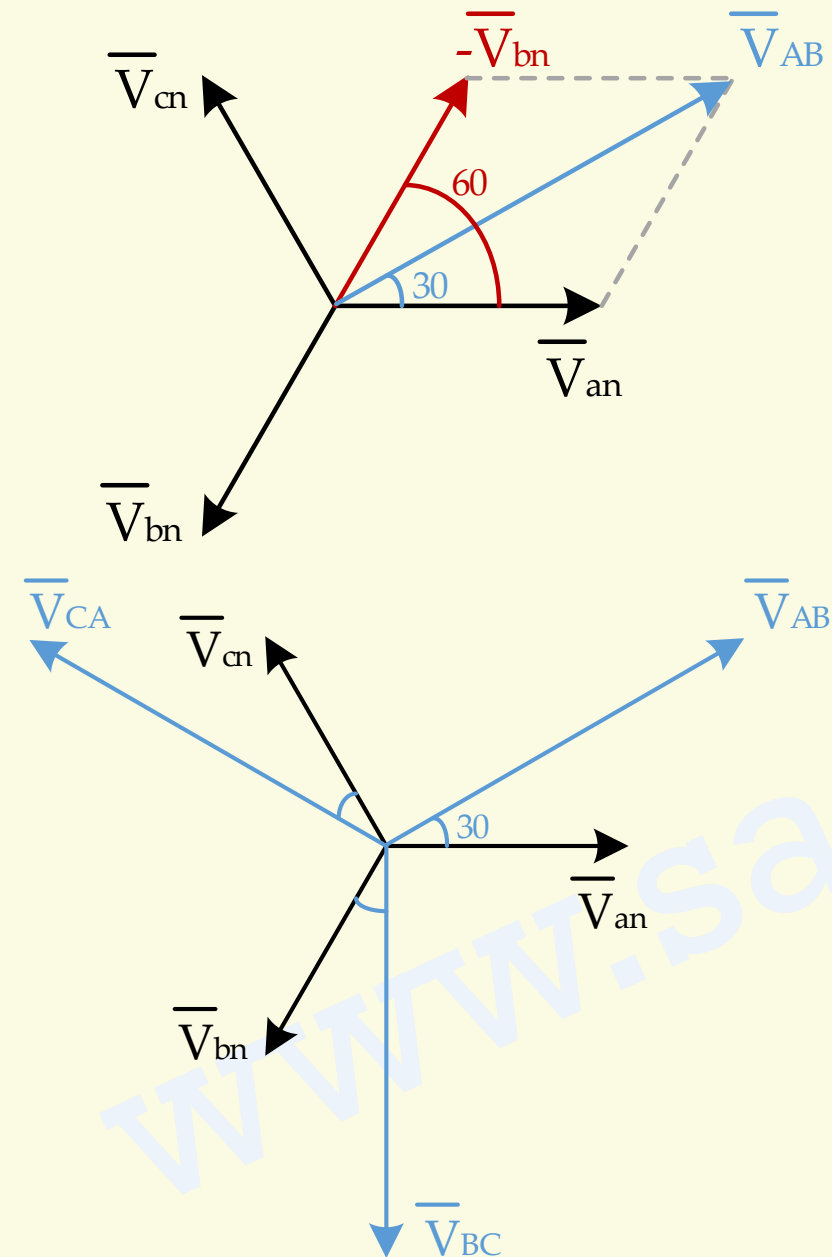
مدارهای سینوسی سه فاز

اگر ولتاژهای فاز متعادل باشند،
با استفاده از مفهوم جمع بردارها
داریم:

با تعریف $\bar{V}_{an} = V \angle 0$ داریم:

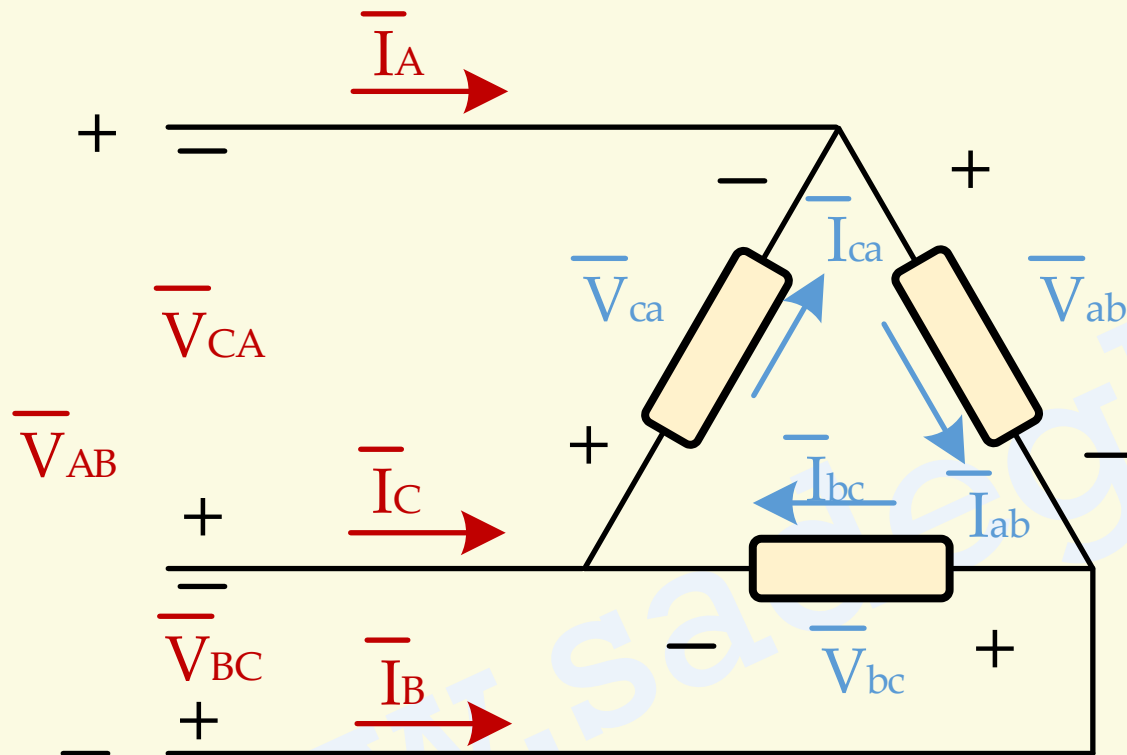
$$\begin{aligned}\bar{V}_{AB} &= \bar{V}_{an} - \bar{V}_{bn} = V \angle 0 - V \angle -120 \\ &= V(1 \angle 0 - 1 \angle -120) = V(\sqrt{3} \angle 30) = \bar{V}_{an}(\sqrt{3} \angle 30)\end{aligned}$$

$$Y \begin{cases} \bar{V}_L = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) \bar{V}_{ph} \\ \bar{I}_L = \bar{I}_{ph} \end{cases}$$



اتصال مثلث (Delta Connection): Δ

در اتصال مثلث ولتاژ خط با ولتاژ فاز برابر است.



کمیت‌های خط (خط-خط)
(L/LL)

کمیت‌های فاز
(ph)

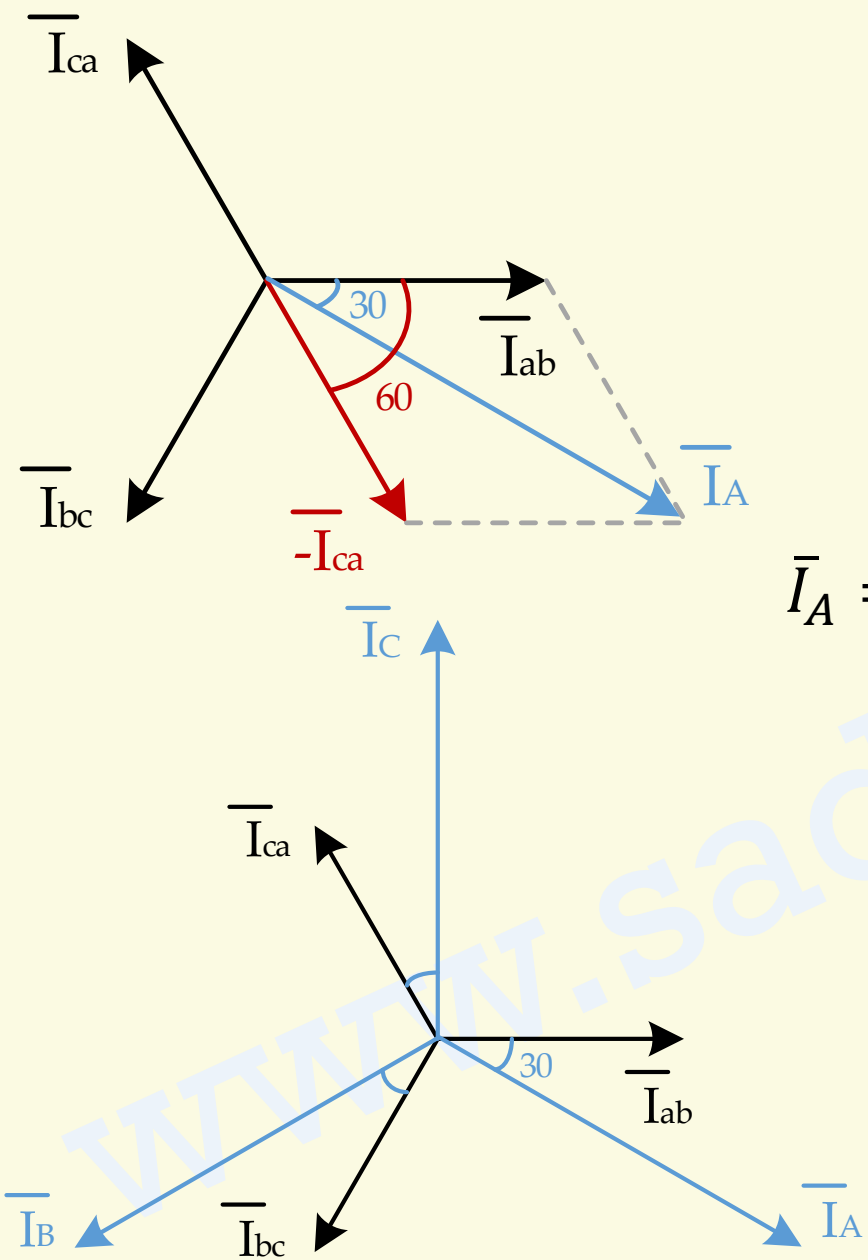
$$\begin{cases} \bar{I}_A = \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} \\ \bar{I}_B = \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab} \\ \bar{I}_C = \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc} \end{cases}$$

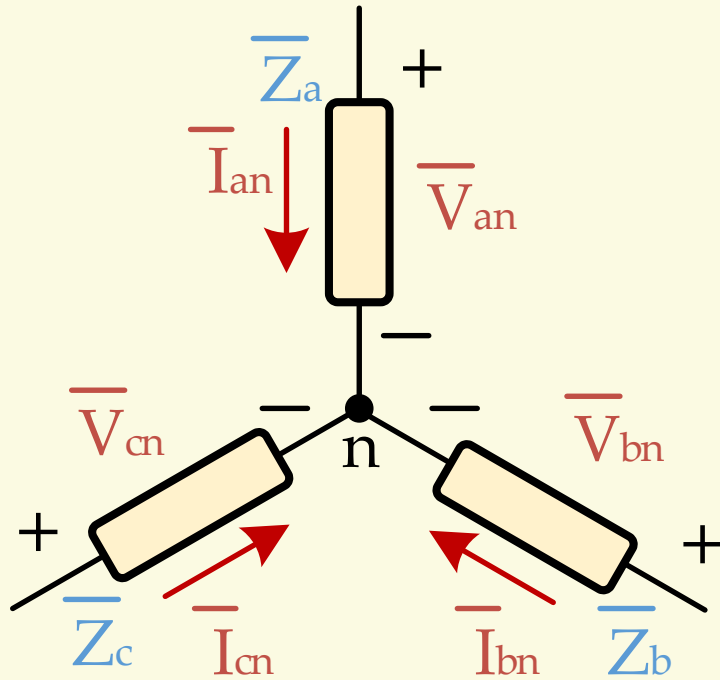
اگر جریان‌های فاز متعادل باشند، با استفاده از مفهوم جمع بردارها داریم:

با تعریف $\bar{I}_{ab} = I \angle 0$ داریم:

$$\begin{aligned}\bar{I}_A &= \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} = I \angle 0 - I \angle +120 \\ &= I(1 \angle 0 - 1 \angle +120) = I(\sqrt{3} \angle -30) = \bar{I}_{ab}(\sqrt{3} \angle -30)\end{aligned}$$

$$\Delta \begin{cases} \bar{V}_L = \bar{V}_{ph} \\ \bar{I}_L = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) \bar{I}_{ph} \end{cases}$$





$$\bar{S}_{3\Phi} = \bar{S}_a + \bar{S}_b + \bar{S}_c = \bar{V}_{an} \bar{I}_{an}^* + \bar{V}_{bn} \bar{I}_{bn}^* + \bar{V}_{cn} \bar{I}_{cn}^* \quad (1)$$

در سیستم متعادل داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_{an} = V_{ph} \angle 0 \\ \bar{V}_{bn} = V_{ph} \angle -120 \\ \bar{V}_{cn} = V_{ph} \angle +120 \end{array} \right. \xrightarrow{\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_c = Z \angle \phi} \left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_{an} = \frac{\bar{V}_{an}}{\bar{Z}_a} = \frac{V_{ph} \angle 0}{Z \angle \phi} = I_{ph} \angle -\phi \\ \bar{I}_{bn} = \frac{V_{ph} \angle -120}{Z \angle \phi} = I_{ph} \angle -\phi - 120 \\ \bar{I}_{cn} = \frac{V_{ph} \angle +120}{Z \angle \phi} = I_{ph} \angle -\phi + 120 \end{array} \right. \quad (3)$$

(2)

با جایگذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۱) داریم:

توان سه فاز = ۳ برابر توان تکفاز



$$\bar{S}_{3\Phi} = 3V_{ph}I_{ph}\angle\phi = P_{3\Phi} + jQ_{3\Phi} \rightarrow \begin{cases} P_{3\Phi} = 3V_{ph}I_{ph}\cos\phi \\ Q_{3\Phi} = 3V_{ph}I_{ph}\sin\phi \\ S_{3\Phi} = 3V_{ph}I_{ph} \end{cases}$$

ϕ اختلاف زاویه ولتاژ و جریان فاز



$$\begin{aligned} Y \begin{cases} V_L = \sqrt{3}V_{ph} \\ I_L = I_{ph} \end{cases} & \Rightarrow V_{ph}I_{ph} = \frac{1}{\sqrt{3}}V_LI_L = \frac{\sqrt{3}}{3}V_LI_L \rightarrow \begin{cases} P_{3\Phi} = \sqrt{3}V_LI_L\cos\phi \\ Q_{3\Phi} = \sqrt{3}V_LI_L\sin\phi \\ S_{3\Phi} = \sqrt{3}V_LI_L \end{cases} \\ \Delta \begin{cases} V_L = V_{ph} \\ I_L = \sqrt{3}I_{ph} \end{cases} & \end{aligned}$$

$$\bar{S}_{3\Phi} = 3\bar{V}_{ph}\bar{I}_{ph}^* \neq \sqrt{3}\bar{V}_L\bar{I}_L^*$$

مثال: یک منبع سه فاز با ولتاژ مؤثر 4157 V بار متعادلی با اتصال ستاره با امپدانس $\bar{Z} = 48 \angle 36.87^\circ \Omega$ را تغذیه می کند. با انتخاب ولتاژ فاز به خنثی بار ($\bar{V}_{an}$) به عنوان مرجع، توان حقیقی و راکتیو تحویلی به بار را محاسبه نمایید.

$$\bar{V}_{an} = \frac{4157}{\sqrt{3}} \angle 0 = 2400 \text{ V} \angle 0 \quad \leftarrow \text{ولتاژ فاز a به عنوان مرجع}$$

$$\bar{I}_{an} = \frac{2400 \angle 0}{48 \angle 36.87} = 50 \text{ A} \angle -36.87^\circ \rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{bn} = 50 \text{ A} \angle -36.87 - 120 = 50 \text{ A} \angle -156.87^\circ \\ \bar{I}_{cn} = 50 \text{ A} \angle -36.87 + 120 = 50 \text{ A} \angle +83.13^\circ \end{cases}$$

$$P_{3\Phi} = 3V_{an}I_{an}\cos\phi = 3 \times 2400 \times 50 \times \cos(0 - (-36.87)) = 288 \text{ kW}$$

$$Q_{3\Phi} = 3V_{an}I_{an}\sin\phi = 3 \times 2400 \times 50 \times \sin(0 - (-36.87)) = 216 \text{ kVAr}$$

مثال: یک منبع سه فاز با ولتاژ مؤثر 4157 V بار متعادلی با اتصال مثلث با امپدانس $\bar{Z} = 48 \angle 36.87^\circ \Omega$ را تغذیه می کند. با انتخاب ولتاژ فاز a بار به عنوان مرجع، توان حقیقی و راکتیو تحویلی به بار را محاسبه نمایید.

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_L = 4157 \angle 0^\circ \text{ V} \quad \text{ولتاژ فاز به عنوان مرجع} \leftarrow$$

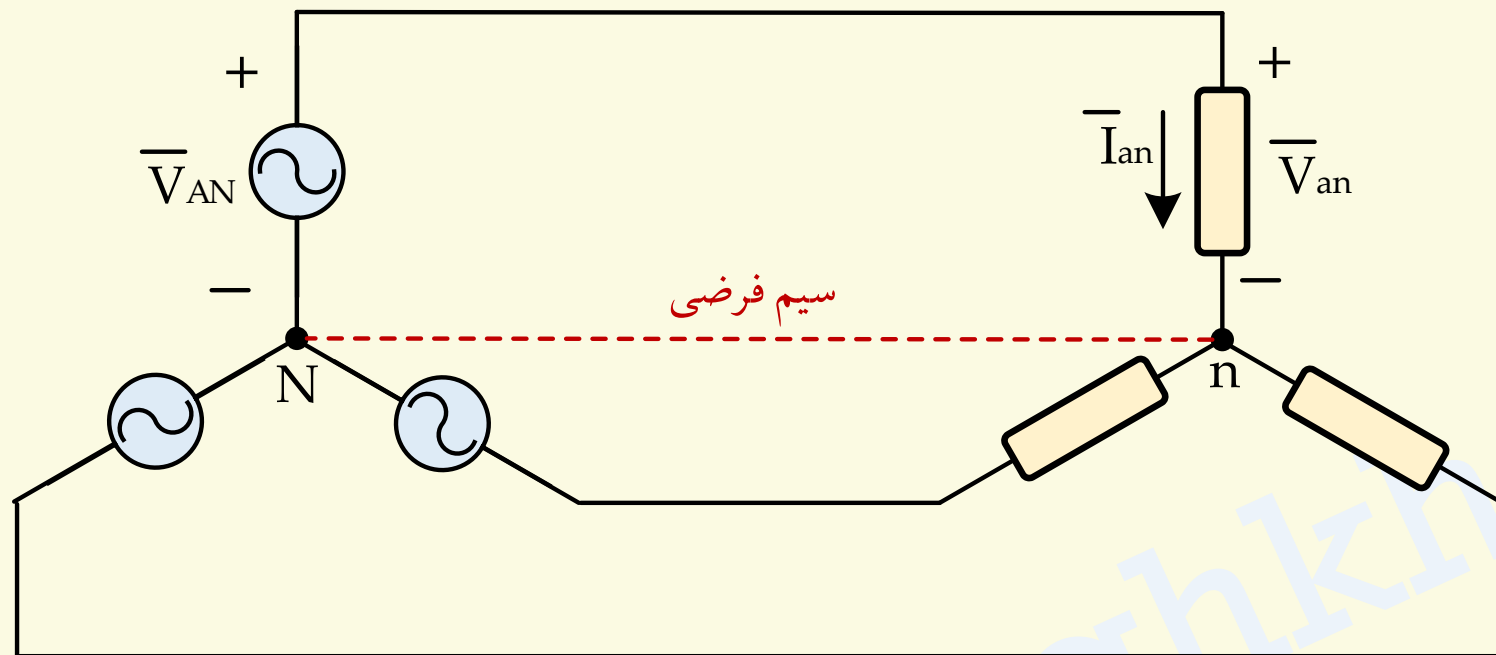
$$\bar{I}_{ab} = \frac{4157 \angle 0^\circ}{48 \angle 36.87^\circ} = 86.6 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

$$P_{3\Phi} = 3V_{ab}I_{ab}\cos\phi = 3 \times 4157 \times 86.6 \times \cos(0 - (-36.87)) = 864 \text{ kW}$$

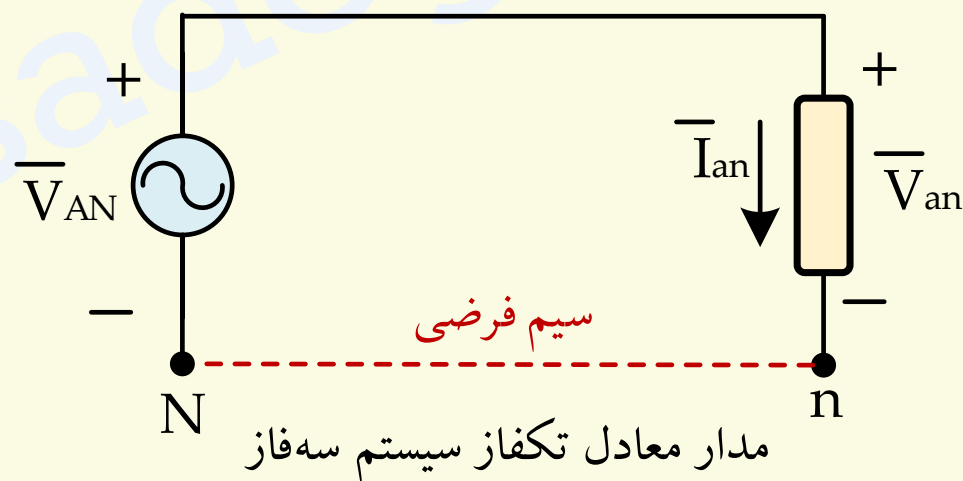
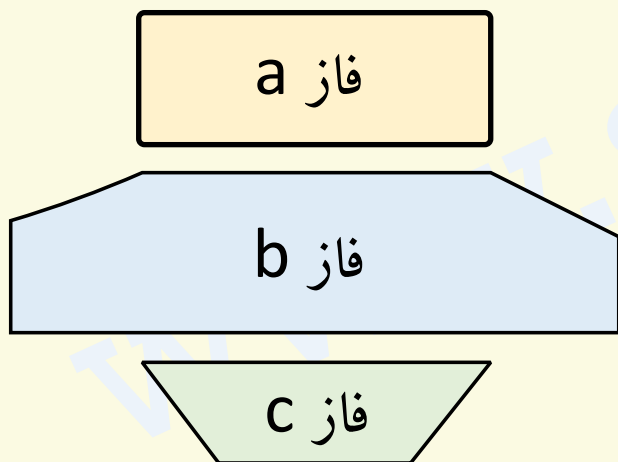
$$Q_{3\Phi} = 3V_{ab}I_{ab}\sin\phi = 3 \times 4157 \times 86.6 \times \sin(0 - (-36.87)) = 648 \text{ kVar}$$

اگر یک بار سه فاز را یک بار بصورت ستاره و همان بار را بار دیگر بصورت مثلث ببندیم و یک ولتاژ خط مشابه به آن اعمال کنیم، در حالت مثلث توان مصرفی ۳ برابر است.

مدار معادل تکفاز



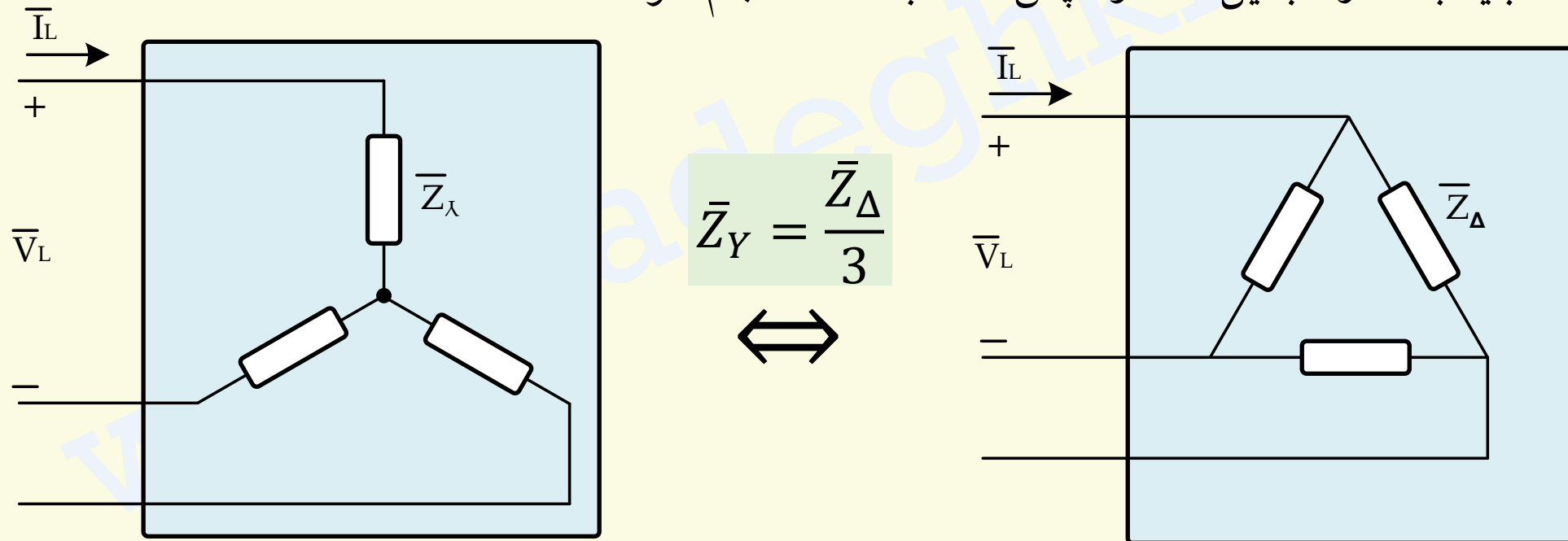
- در یک سیستم متعادل با اتصال ستاره، نقاط مرکز ستاره (n و N) هم‌پتانسیل هستند. پس از نظر مداری می‌توان آنها را با استفاده از یک سیم فرضی بهم متصل نمود.

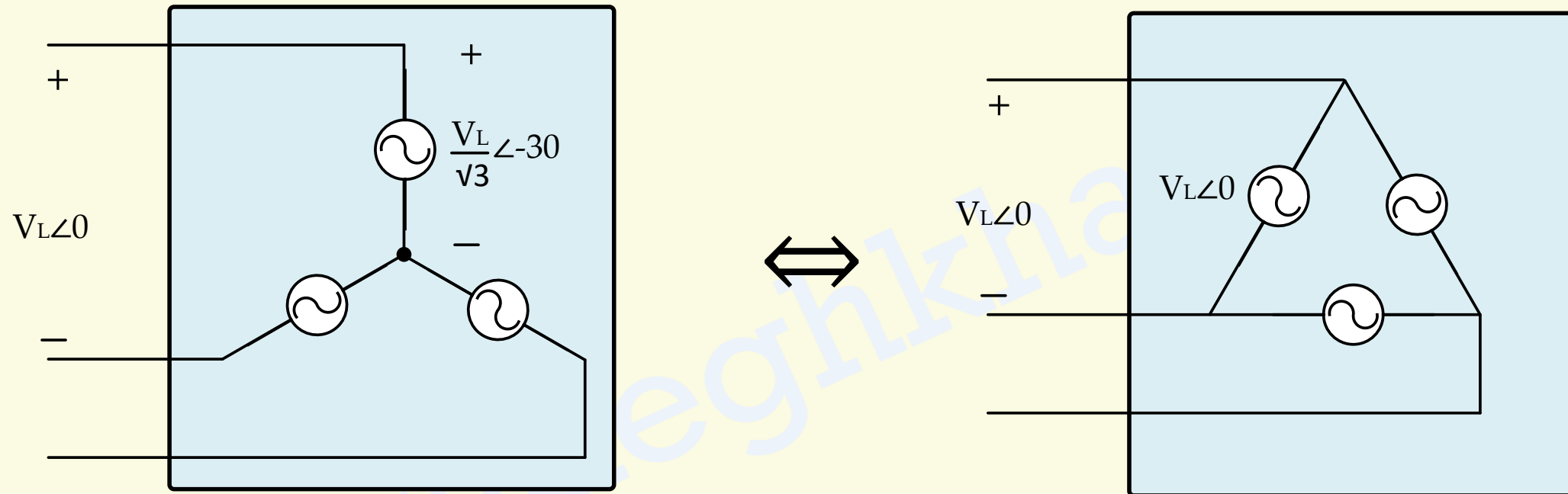


- در این حالت می‌توان هر یک از فازها را بطور جداگانه تحلیل نمود.

مدار معادل تکفاز سیستم سه‌فاز

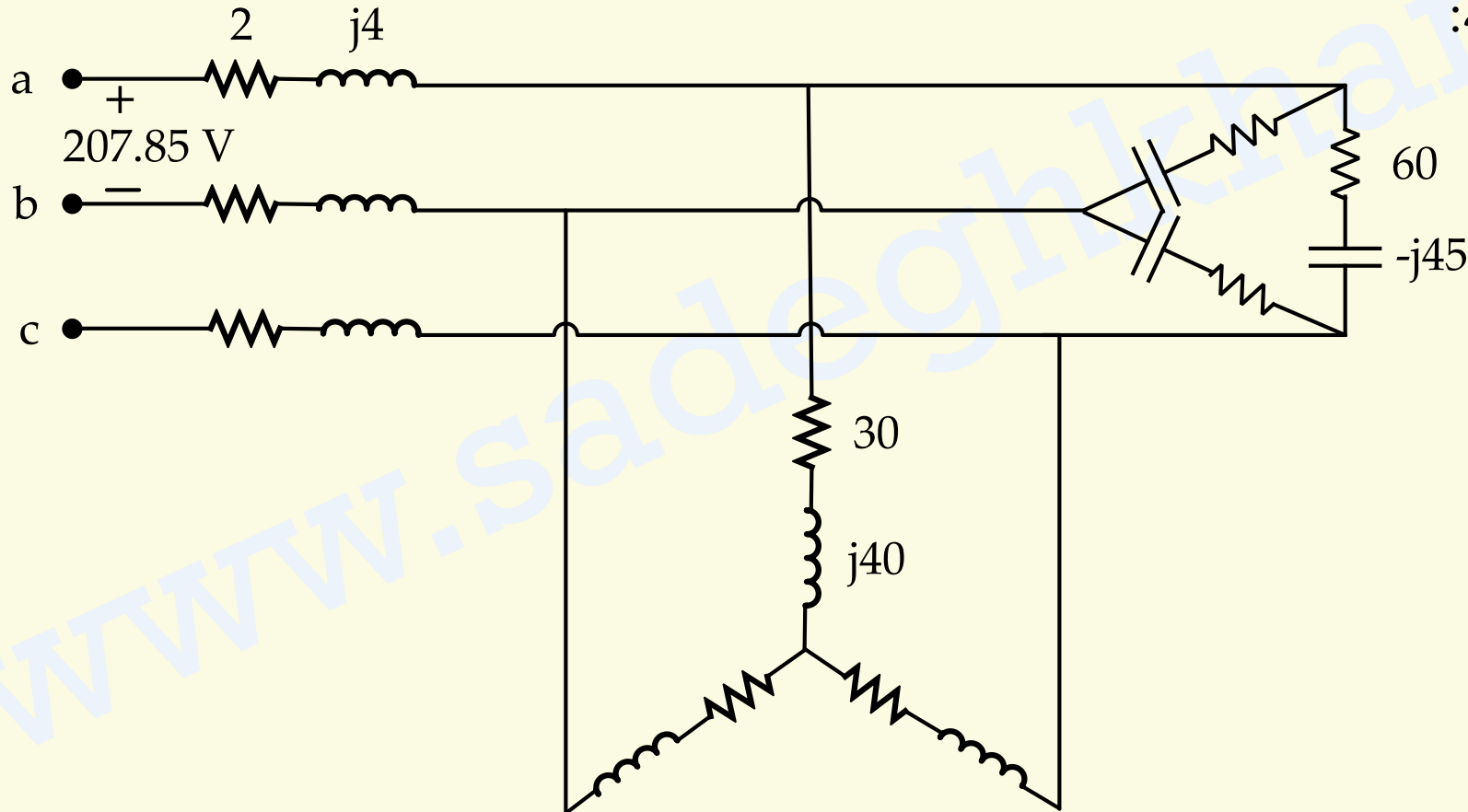
- در واقع بجای حل یک مدار بزرگ شامل سه فاز، یک مدار کوچکتر شامل تنها یک فاز حل می شود. پس از محاسبه کمیت های آن فاز، جواب فازهای دیگر بدون نیاز به محاسبه و با توجه به برابری دامنه و اختلاف فاز ۱۲۰ درجه در سیستم متعادل بدست می آید.
- اما شرط استفاده از مدار معادل تکفاز، وجود سیم فرضی است که در اتصال مثلث وجود ندارد. بنابراین اگر مدار بصورت مثلث بود، ابتدا باید به ستاره تبدیل شده و سپس محاسبات آن انجام شوند.





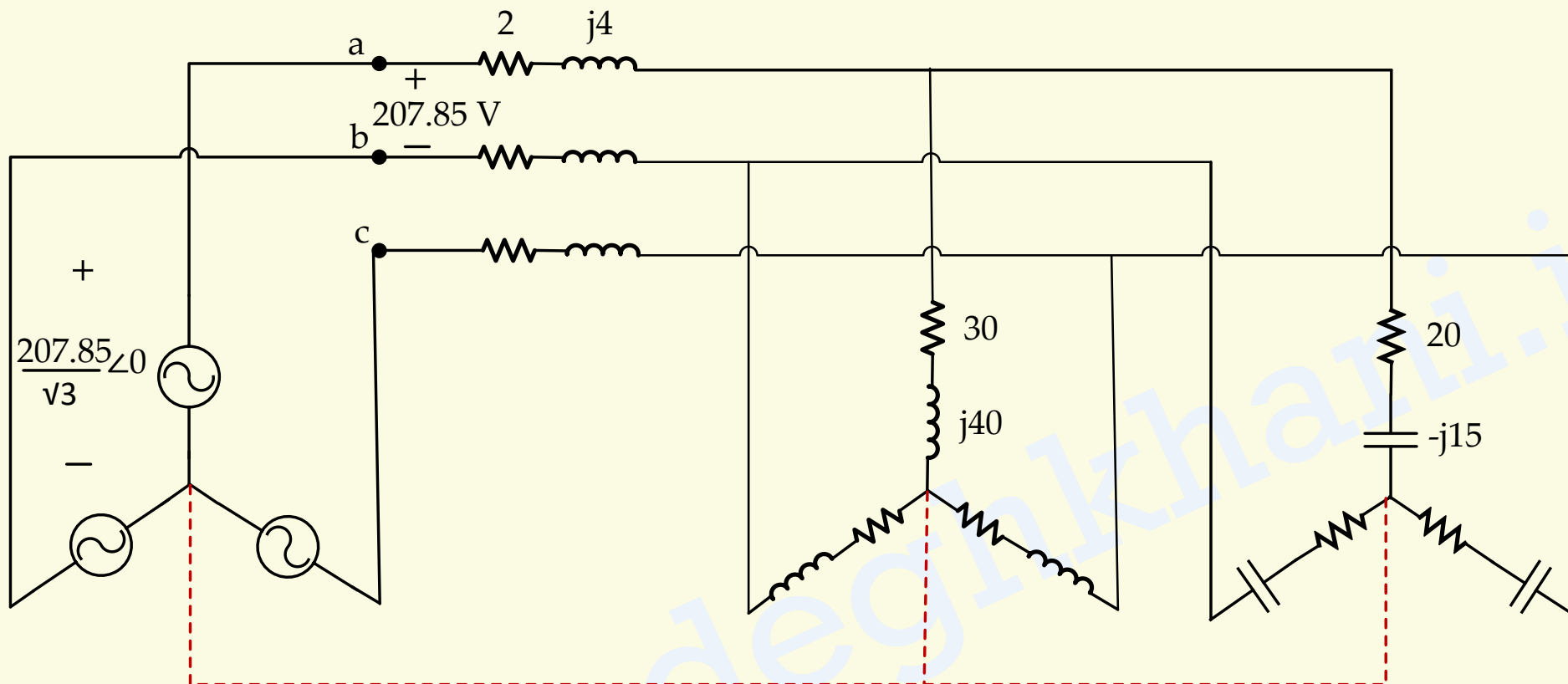
نکته: سیستم‌های سه فاز با ولتاژ خط و توان سه فاز معرفی می‌شوند.

مثال: در مدار شکل زیر، امپدانس خط $2+j4 \Omega$ بوده و خط مذکور دو بار سه فاز متعادل را تغذیه می کند. بار اول دارای اتصال ستاره بوده و امپدانس هر فاز آن $30+j40 \Omega$ می باشد در حالیکه بار دوم دارای اتصال مثلث بوده و امپدانس هر فاز آن $60-j45 \Omega$ است. این سیستم توسط شبکه سه فاز متعادلی با ولتاژ $207.85 V$ تغذیه می شود. ولتاژ فاز **a** منبع را به عنوان مرجع در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه:



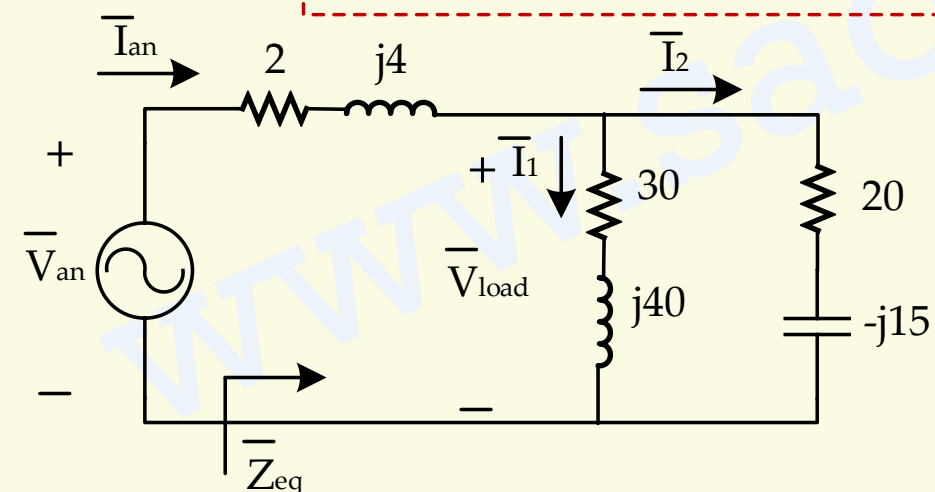
- (الف) جریان و توان منبع
- (ب) ولتاژ خط در محل بار
- (ج) جریان فاز هر بار
- (د) بررسی قانون بقای توان

حل مثال:



$$\bar{Z}_{Y2} = \frac{60 - j45}{3} = 20 - j15 \Omega$$

(الف)



ولتاژ فاز **a** به عنوان مرجع ← $\bar{V}_{an} = \frac{207.85}{\sqrt{3}} \angle 0 = 120^V \angle 0$

$$\bar{Z}_{eq} = [(30 + j40) || (20 - j15)] + (2 + j4) = 24 \Omega$$

$$\bar{I}_{an} = \frac{\bar{V}_{an}}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{120^V \angle 0}{24} = 5^A \angle 0 \rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{bn} = 5^A \angle -120^\circ \\ \bar{I}_{cn} = 5^A \angle +120^\circ \end{cases}$$

$$\bar{S}_G = 3\bar{V}_{an}\bar{I}_{an}^* = 3(120 \angle 0)(5 \angle 0) = 1800^W + j0^{Var}$$

(ب)

$$\bar{V}_{an,load} = \bar{V}_{an} - (2 + j4)\bar{I}_{an} = 120 \angle 0 - (2 + j4)(5 \angle 0) = 110 - j20 = 111.8^V \angle -10.3^\circ$$

ولتاژ فاز

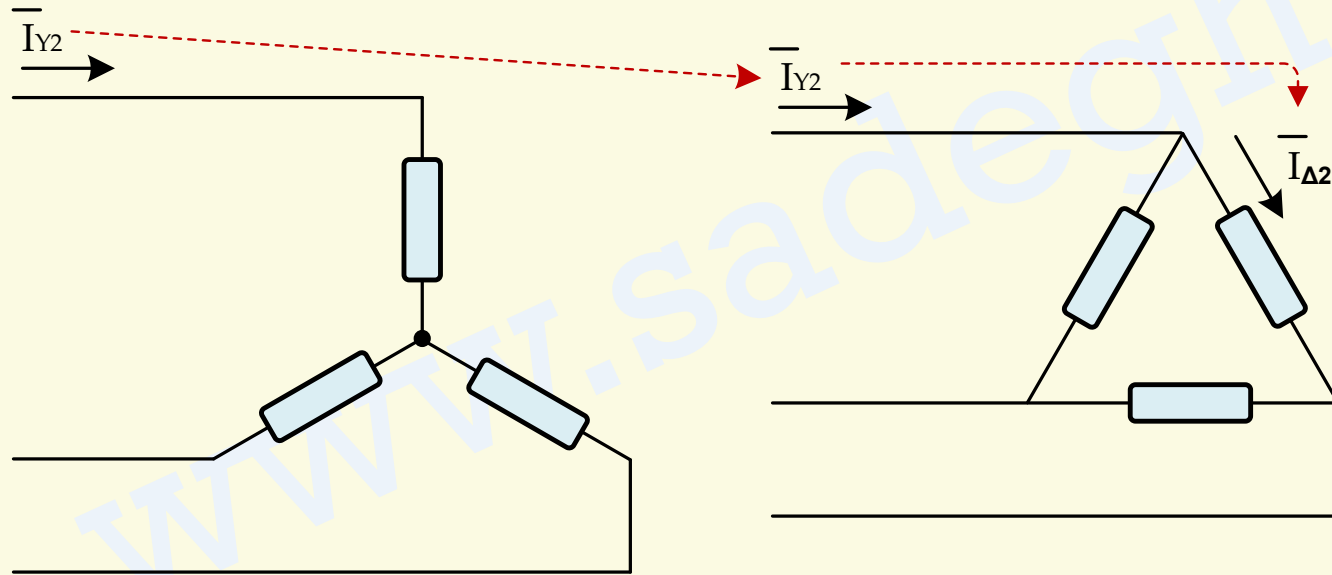
$$\bar{V}_{ab,load} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) \bar{V}_{ph,load} = 193.64^V \angle +19.7^\circ \rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{bc,load} = 193.64^V \angle -100.3^\circ \\ \bar{V}_{ca,load} = 193.64^V \angle +139.7^\circ \end{cases}$$

ولتاژ خط

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_{an,load}}{\bar{Z}_{Y1}} = \frac{111.8^V \angle -10.3^\circ}{30 + j40} = 2.236^A \angle -63.4^\circ$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{an,load}}{\bar{Z}_{Y2}} = \frac{111.8^V \angle -10.3^\circ}{20 - j15} = 4.472^A \angle +26.56^\circ$$

(ج)
اما این جریان از فاز a واقعی بار ۲ نمی‌گذرد زیرا بار ۲ تبدیل به ستاره شده است و در واقع این جریان فاز a اتصال ستاره معادل بار ۲ است. برای بدست آوردن جریان عبوری از فاز a اتصال مثلث بار دو به این صورت عمل می‌کنیم:



$$\begin{aligned} \bar{I}_{\Delta 2} &= \frac{\bar{I}_{Y2}}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} \\ &= \frac{4.472^A \angle +26.56^\circ}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = 2.58^A \angle +56.56^\circ \end{aligned}$$

$$\bar{S}_1 = 3\bar{V}_{an,load}\bar{I}_1^* = 3(111.8^V \angle -10.3^\circ)(2.236^A \angle -63.4^\circ)^* = 450^W + j600^{VAr} \quad (د)$$

$$\bar{S}_2 = 3\bar{V}_{an,load}\bar{I}_2^* = 3(111.8^V \angle -10.3^\circ)(4.472^A \angle +26.56^\circ)^* = 1200^W - j900^{VAr}$$

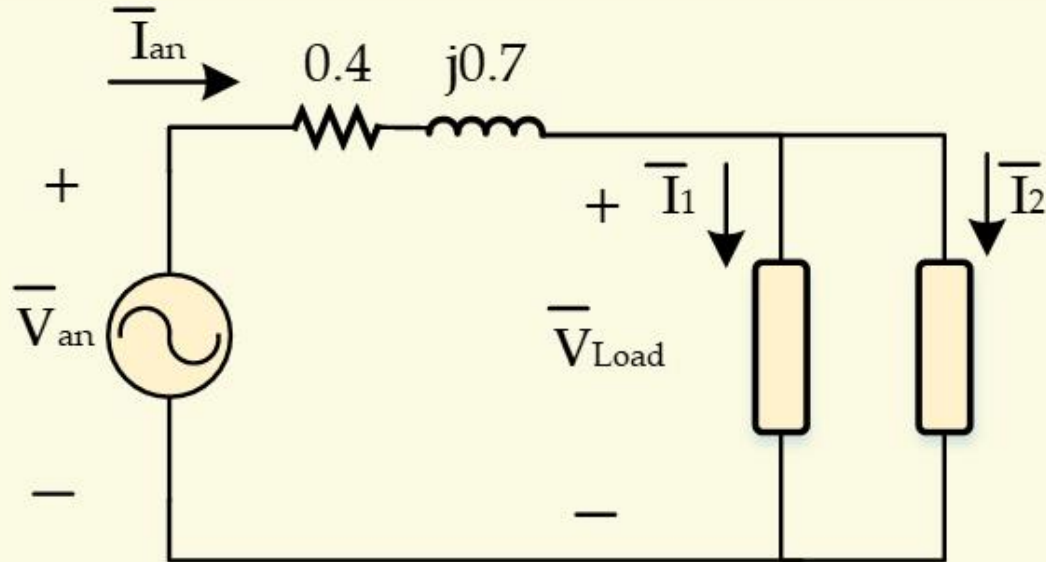
$$\bar{S}_{Line} = 3\bar{Z}_{Line}|\bar{I}_{an}|^2 = 3(2 + j4)(5^2) = 150^W + j300^{VAr}$$

$$\bar{S}_G = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_{Line} \quad \text{قانون بقای توان}$$

$$1800^W + j0^{VAr} \checkmark = (450^W + j600^{VAr}) + (1200^W - j900^{VAr}) + (150^W + j300^{VAr})$$

مثال: یک خط سه فاز با امپدانس $0.4 + j0.7 \Omega$ دو بار سه فاز متعادل را تغذیه می کند. بار اول 560.1 kVA در ضریب توان 0.707 پسفاز را جذب می نماید در حالیکه بار دوم 132 kW را در ضریب توان واحد جذب می کند. ولتاژ خط در سمت بارها 3810.5 V بوده که ولتاژ فاز a آن را به عنوان مرجع در نظر بگیرید. مطلوبست محاسبه ولتاژ خط در سمت تغذیه.

حل مثال:



$$\bar{V}_{\text{Load}} = \frac{3810.5}{\sqrt{3}} \angle 0 = 2200 \text{ V} \angle 0$$

ولتاژ فاز به عنوان مرجع ←

$$PF_1 = 0.707 \rightarrow \phi_1 = \cos^{-1} 0.707 = 45^\circ$$

Lag

$$\bar{S}_1 = S_1(\cos\phi + j\sin\phi) = 560.1(0.707 + j0.707) = 396 \text{ kW} + j396 \text{ kVAr}$$

$$\bar{S}_2 = 132^{\text{kW}} + j0^{\text{kVAr}}$$

$$\bar{S}_{\text{Load}} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 528^{\text{kW}} + j396^{\text{kVAr}}$$

$$\bar{S}_{3\Phi} = 3\bar{V}_{ph}\bar{I}_{ph}^* \rightarrow \bar{I}_{an} = \left(\frac{528^{\text{kW}} + j396^{\text{kVAr}}}{3 \times 2200 \angle 0} \right)^* = 100^{\text{A}} \angle -36.87^\circ$$

روش دوم محاسبه جریان کل بار:

$$\bar{I}_1 = \frac{S_{3\Phi}}{3V_{ph}} \angle \pm \cos^{-1} \text{PF} = \frac{S_{3\Phi}}{\sqrt{3}V_L} \angle \pm \cos^{-1} \text{PF}$$

$$= \frac{560.1^{\text{kVA}}}{3 \times 2200} \angle -\cos^{-1} 0.707 = 84.86^{\text{A}} \angle -45^\circ$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_2 &= \frac{P_{3\Phi}}{3V_{ph}\cos\phi} \angle \pm \cos^{-1} \text{PF} = \frac{P_{3\Phi}}{\sqrt{3}V_L\cos\phi} \angle \pm \cos^{-1} \text{PF} \\ &= \frac{132^{\text{kW}}}{\sqrt{3} \times 3810.5 \times 1} \angle 0 = 20^{\text{A}} \angle 0\end{aligned}$$

$$\bar{I}_{an} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 100^{\text{A}} \angle -36.87^\circ$$

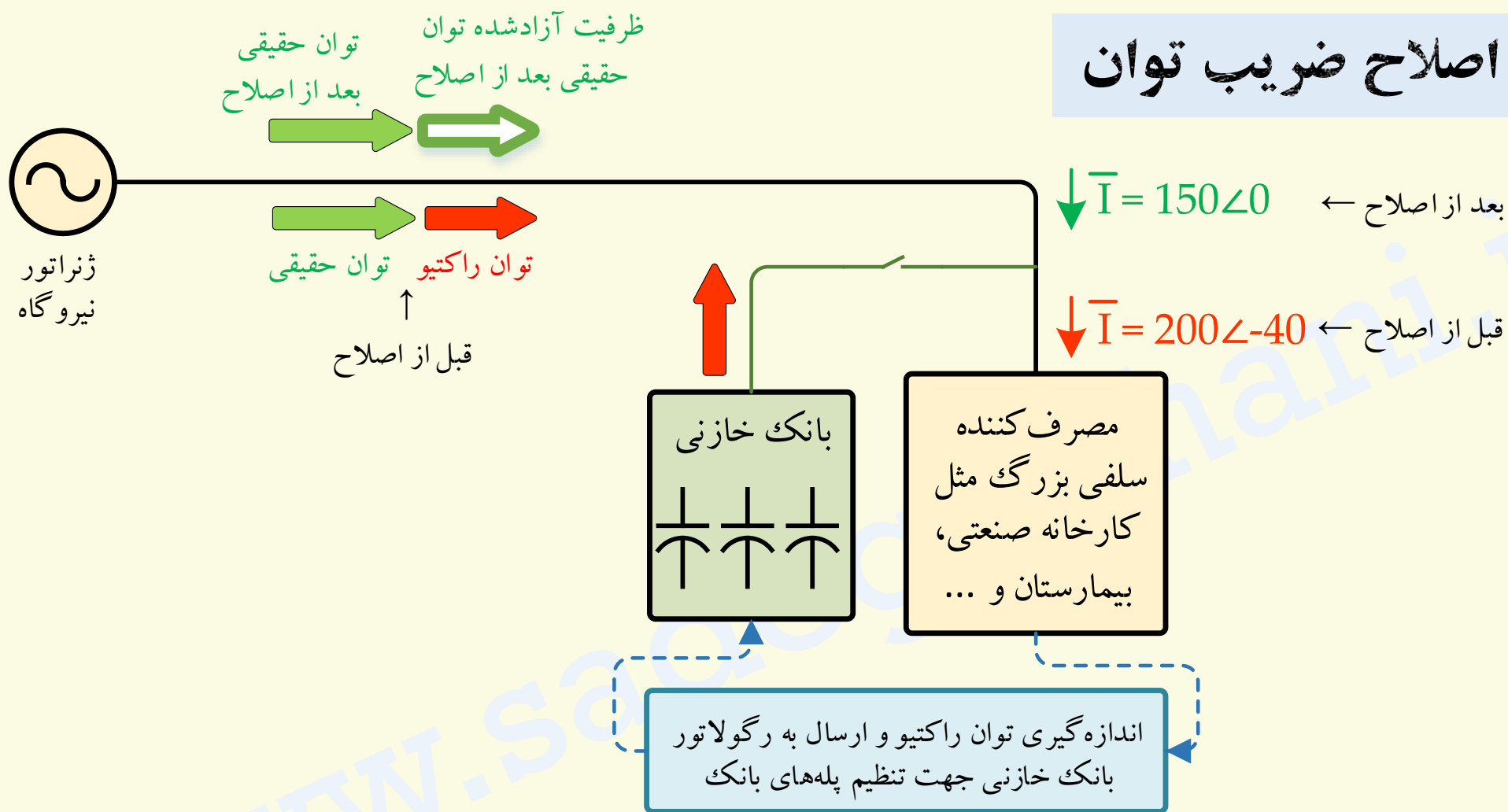
$$\bar{V}_{an} = (0.4 + j0.7)\bar{I}_{an} + \bar{V}_{\text{load}} = (0.4 + j0.7)(100^{\text{A}} \angle -36.87^\circ) + 2200 \angle 0 = 2274.2^{\text{V}} \angle 0.81^\circ$$

ولتاژ فاز

$$\bar{V}_{ab} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) \bar{V}_{an} = 3939.07^{\text{V}} \angle +30.81^\circ \rightarrow \begin{cases} \bar{V}_{bc} = 3939.07^{\text{V}} \angle -89.19^\circ \\ \bar{V}_{ca} = 3939.07^{\text{V}} \angle +150.81^\circ \end{cases}$$

ولتاژ خط

بانک خازنی به منظور اصلاح ضریب توان

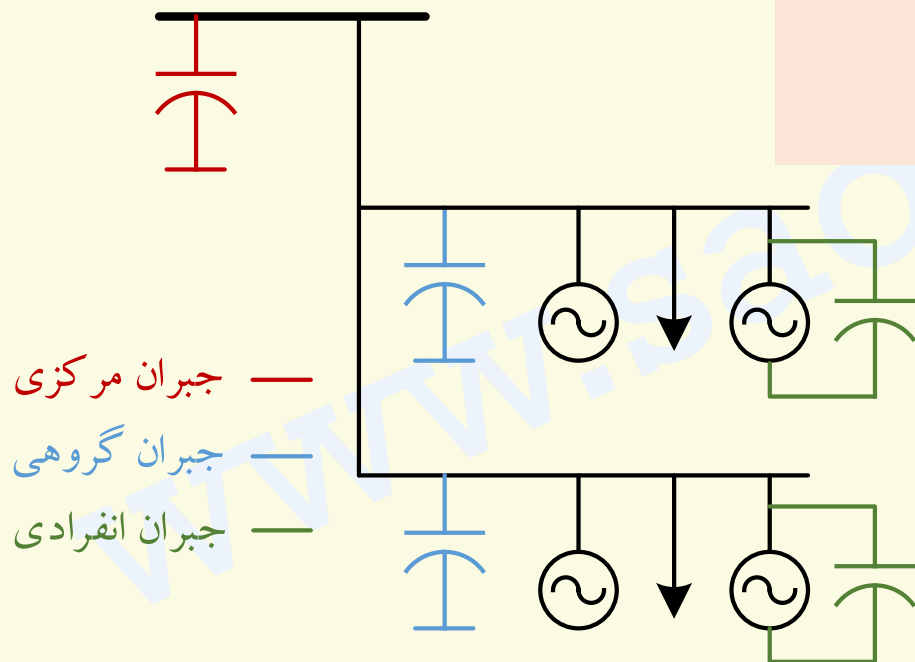


اکثر بارهای شبکه سلفی ← جاری شدن توان راکتیو در شبکه ← اشغال ظرفیت مفید شبکه ← نیاز به افزایش ظرفیت نیروگاه ها و نصب خطوط انتقال و تجهیزات جدید ← افزایش هزینه شرکت برق ← افزایش قیمت برق

بانک خازنی به منظور اصلاح ضریب توان

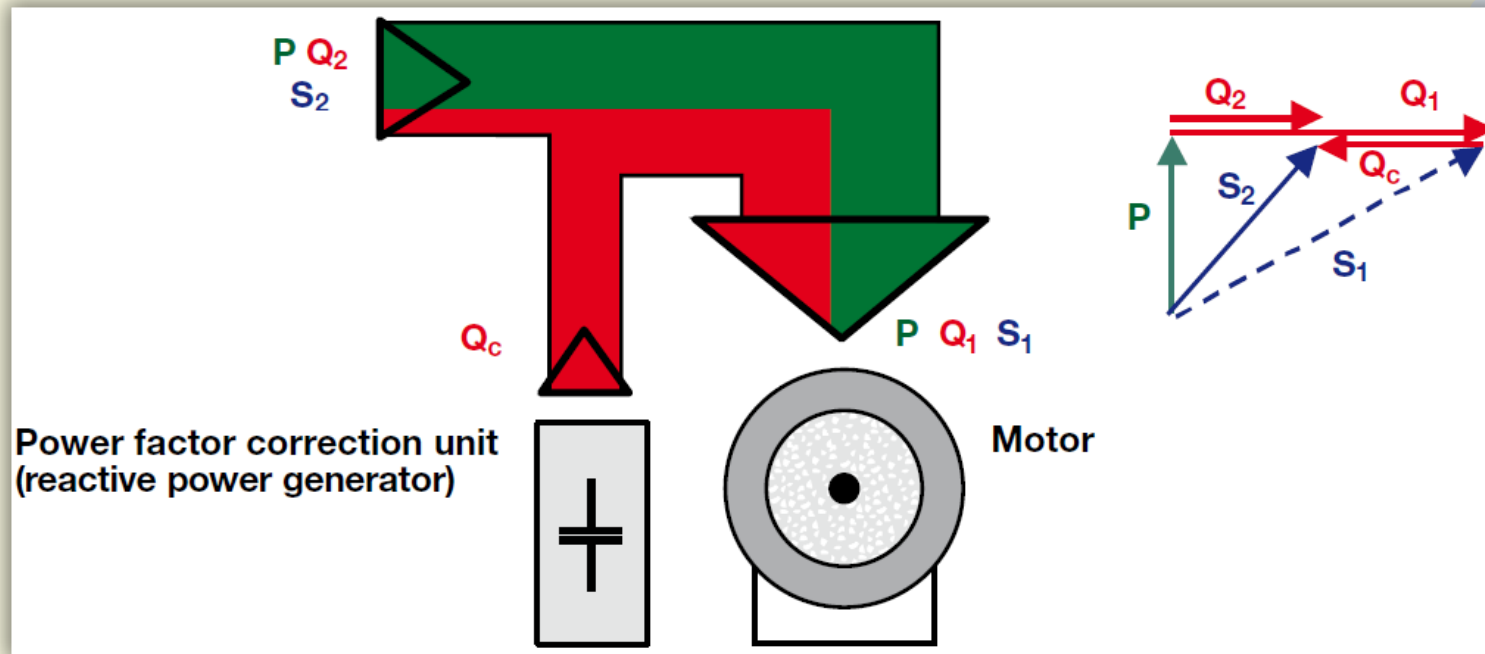
راهکار: تأمین توان راکتیو بارها بصورت محلی ← نصب بانک خازنی در محل مصرف کننده سلفی بزرگ

تضمین نصب بانک خازنی توسط مصرف کننده: جریمه سنگین از طرف شرکت برق
جریمه $\rightarrow 0.9 < \text{ضریب توان مصرف کننده}$
حداقل ضریب توان اصلاح شده $= 0.9$ پسفاز



روش های خازن گذاری:

- جبران مرکزی: نصب یک بانک خازنی در ورودی مصرف کننده
- جبران گروهی: نصب خازن به موازات هر گروه از مصرف کنندگان
- جبران انفرادی: نصب خازن به موازات هر مصرف کننده



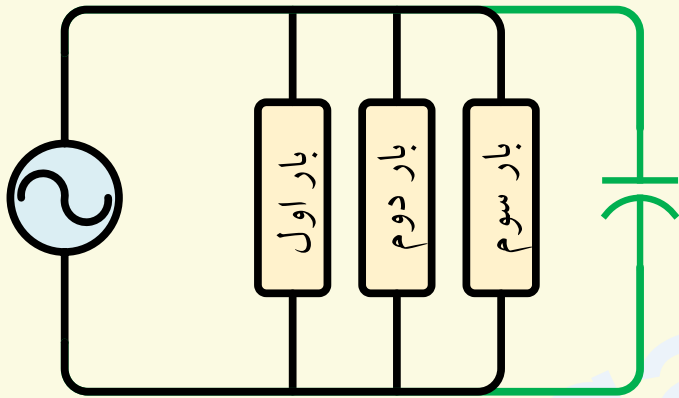
$$Q_c = P(\tan\phi_{\text{old}} - \tan\phi_{\text{new}})$$

ظرفیت بانک خازنی

توالی بانک خازنی: بدلیل متغیر بودن توان راکتیو مصرفی و بالطبع توان راکتیو مورد نیاز، بانک خازنی متشکل از چند خازن است که در چند پله وارد/خارج می شوند. ظرفیت پله های دوم به بعد ضریبی از ظرفیت پله اول است. به عنوان مثال اگر ظرفیت پله اول 10 kVAr باشد، توالی $1:2:2$ به این معنی است که این بانک سه پله دارد و ظرفیت پله دوم و سوم هر کدام 20 kVAr است. عدد اول در توالی همواره 1 است. بنابراین اگر پله اول و دوم در مدار باشند، 30 kVAr توان راکتیو تزریق خواهد شد.

بانک خازنی به منظور اصلاح ضریب توان

مثال: سه بار سه فاز زیر بطور موازی به هم متصل شده و توسط یک شبکه ۴۰۰ ولتی با فرکانس ۵۰ Hz تغذیه می شوند. مطلوبست محاسبه حداقل ظرفیت بانک خازنی برای جریمنه نشدن توسط شرکت برق (بر حسب کیلووار و میکروفاراد).



- بار اول: بار سلفی ۱۲۵ kVA با ضریب توان ۰/۲۸
- بار دوم: بار خازنی ۱۰ kW و ۴۰ kVAr
- بار سوم: بار مقاومتی ۱۵ kW

حل مثال: ابتدا توان بارها را حساب می کنیم:

$$PF_1 = 0.28 \rightarrow \phi_1 = \cos^{-1} 0.28 = 73.73^\circ \rightarrow \sin \phi_1 = 0.96$$

$$\bar{S}_1 = S_1(\cos \phi_1 + j \sin \phi_1) = 125(0.28 + j0.96) = 35^{\text{kW}} + j120^{\text{kVAr}}$$

بانک خازنی به منظور اصلاح ضریب توان

$$\bar{S}_2 = 10^{\text{kW}} - j40^{\text{kVAr}}$$

$$\bar{S}_3 = 15^{\text{kW}} + j0$$

$$\Rightarrow \bar{S}_{\text{Load}} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = 60^{\text{kW}} + j80^{\text{kVAr}}$$

$$\phi_{\text{Load}} = \tan^{-1} \frac{80}{60} = 53.13^\circ$$

$$PF_{\text{Load}} = \cos \phi_{\text{Load}} = 0.6 \text{ Lag} < 0.9 \text{ Lag} \rightarrow \text{جریمه}$$

$$\bar{I}_{\text{old}} = \left(\frac{\bar{S}_{\text{Load}}}{3\bar{V}_{ph}} \right)^* = \left(\frac{60^{\text{kW}} + j80^{\text{kVAr}}}{3 \times 400 / \sqrt{3} \angle 0} \right)^* = 144.34^{\text{A}} \angle -53.13^\circ$$

$$\bar{S}_{\text{Load}} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 + \bar{S}_C = 60 + j \underbrace{(80 - Q_C)}_{Q_{\text{new}}} \quad \leftarrow \text{بعد از نصب بانک خازنی}$$

تلفات توان حقیقی مصرفی بانک خازنی کوچک بوده و معمولاً از آن صرف نظر می شود $\leftarrow P_{\text{new}} = P_{\text{old}} = P = 60 \text{ kW}$

$$PF_{\text{new}} = 0.9 \rightarrow \phi_{\text{new}} = \cos^{-1}(0.9) = 25.84^\circ \quad \leftarrow \text{حداقل ضریب توان برای جریمه نشدن} = 0.9$$

$$\tan\phi_{\text{new}} = \frac{Q_{\text{new}}}{P} \rightarrow \tan 25.84^\circ = \frac{Q_{\text{new}}}{60 \text{ kW}} \rightarrow Q_{\text{new}} = 29.1 \text{ kVAr}$$

$$Q_{\text{new}} = 80 - Q_C = 29.1 \Rightarrow Q_C = 50.9 \text{ kVAr}$$

راه دوم - استفاده از فرمول بانک خازنی:

$$Q_C = P(\tan\phi_{\text{old}} - \tan\phi_{\text{new}}) = 60(\tan 53.13 - \tan 25.84) = 50.9 \text{ kVAr}$$

$$\bar{I}_{\text{new}} = \left(\frac{\bar{S}_{\text{Load}}}{3\bar{V}_{ph}} \right)^* = \left(\frac{60 \text{ kW} + j29.06 \text{ kVAr}}{3 \times 400 / \sqrt{3} \angle 0} \right)^* = 96.23 \text{ A} \angle -25.84^\circ$$

$$Q_C = 3C\omega V_{ph}^2 \Rightarrow C_{\Delta} = \frac{Q_C}{3 \times (2\pi f) V_L^2} = \frac{50.9 \text{ kVAr}}{3 \times (2\pi \times 50) 400^2} = 337 \mu\text{F} \quad \leftarrow \text{خازن با اتصال مثلث}$$

↑
ولتاژ دو سر هر فاز در اتصال مثلث

$$Q_C = 3C\omega V_{ph}^2 \Rightarrow C_Y = \frac{Q_C}{3 \times (2\pi f) V_{ph}^2} = \frac{50.9 \text{ kVAr}}{3 \times (2\pi \times 50) \left(\frac{400}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1012 \mu\text{F} \quad \leftarrow \text{خازن با اتصال ستاره}$$

↑
ولتاژ دو سر هر فاز در اتصال ستاره